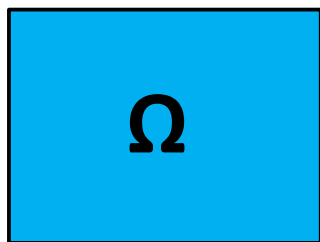


Tillegg A

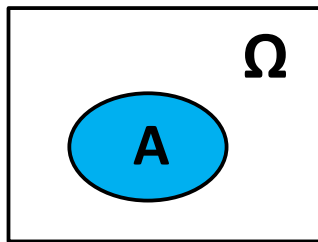
Mengdelære

Venn-diagrammer er illustrasjoner som brukes bl.a. innen mengdelære. De brukes for å visualisere de matematiske forbindelsene mellom ulike grupper av mengder. La oss illustrere dette via de mest velkjente eksemplene.

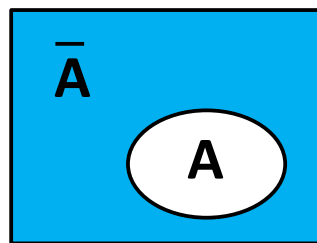
For et eksperiment, la A og B være to begivenheter i utfallsrommet Ω .



Utfallsrommet Ω er hele det blå området.

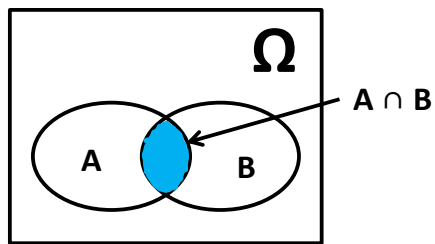


Begivenheten A visualiseres ved det blå området.



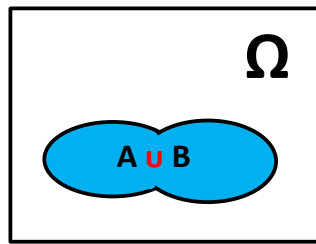
$\bar{A}$ benevnes "ikke" A

Figur A.1: Utfallsrommet Ω , begivenheten A og komplementet $\bar{A}$.



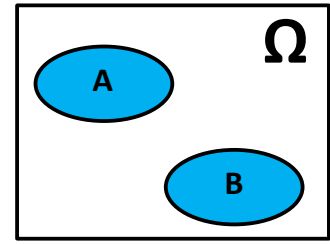
Snitt:

$A \cap B$ betyr A **og** B.
Tilsvare **OVERLAPP**
av mengder.



Union:

$A \cup B$ betyr A **eller** B.
Tilsvare **SUM** av
mengder.



Disjunkt:

$A \cap B = \emptyset$.
A og B inntreffer **ALDRI**
samtidig.
Ingen felles elementer.

Figur A.2: Snitt, union og disjunkt.

Ut fra disse [Venn-diagrammene](#) kan vi merke oss følgende huskereglar:

$\cap$	=	og	,	tilsvare OVERLAPP av mengder
$\cup$	=	eller	,	tilsvare SUM av mengder

Eksempel: ([terningkast](#))

La oss kaste en terning èn gang. La oss se på begivenhetene:

A = resultat med 1, 3 eller 4 øyne på terningen (A.1)

B = resultat med 3, 4 eller 5 øyne på terningen (A.2)

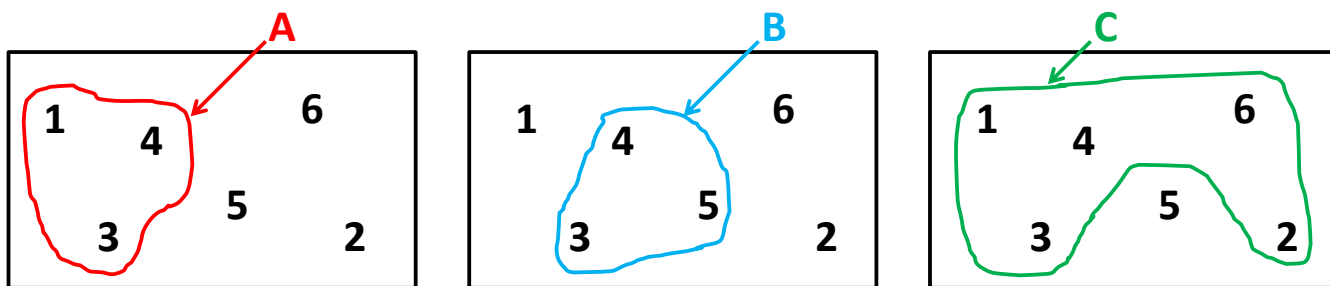
C = resultat hvor 5 ikke fås (A.3)

Matematisk kan disse begivenhetene skrives:

$A = \{1, 3, 4\}$ (A.4)

$B = \{3, 4, 5\}$ (A.5)

$C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ (A.6)



Figur A.3: Begivenhetene A , B og C .



Figur A.4: Terning.

$\cap$ = “og”, tilsvarer OVERLAPP:

$$\overbrace{A \cap B}^{\text{og}} = \{3, 4\} \quad (\text{ b\aa de i } A \text{ og } B) \quad (\text{A.7})$$

$$A \cap \overbrace{C}^{\text{og}} = \{1, 3, 4\} \quad (\text{ b\aa de i } A \text{ og } C) \quad (\text{A.8})$$

$$\overbrace{B \cap C}^{\text{og}} = \{3, 4\} \quad (\text{ b\aa de i } B \text{ og } C) \quad (\text{A.9})$$

$\cup$ = “eller”, tilsvarer SUM:

$$\overbrace{A \cup B}^{\text{eller}} = \{1, 3, 4, 5\} \quad (A \text{ eller } B \text{ eller begge }) \quad (\text{A.10})$$

$$A \cup \overbrace{C}^{\text{eller}} = \{1, 2, 3, 4, 6\} \quad (A \text{ eller } C \text{ eller begge }) \quad (\text{A.11})$$

$$\overbrace{B \cup C}^{\text{eller}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (B \text{ eller } C \text{ eller begge }) \quad (\text{A.12})$$

De komplementære begivenhetene er:

$$\overline{A} = \{2, 5, 6\} \quad (\text{ ikke i } A) \quad (\text{A.13})$$

$$\overline{B} = \{1, 2, 6\} \quad (\text{ ikke i } B) \quad (\text{A.14})$$

$$\overline{C} = \{5\} \quad (\text{ ikke i } C) \quad (\text{A.15})$$

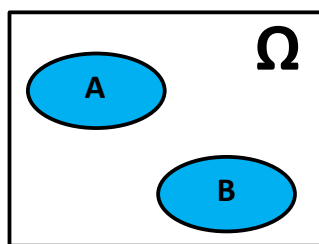
Videre har vi at:

$$A \cap \overline{B} = \{1\} \quad (A \text{ og ikke i } B) \quad (\text{A.16})$$

■

Definisjon: (disjunkte mengder)

To mengder A og B er disjunkte dersom $A \overset{\text{og}}{\cap} B = \emptyset$.



Disjunkt:

$$A \cap B = \emptyset.$$

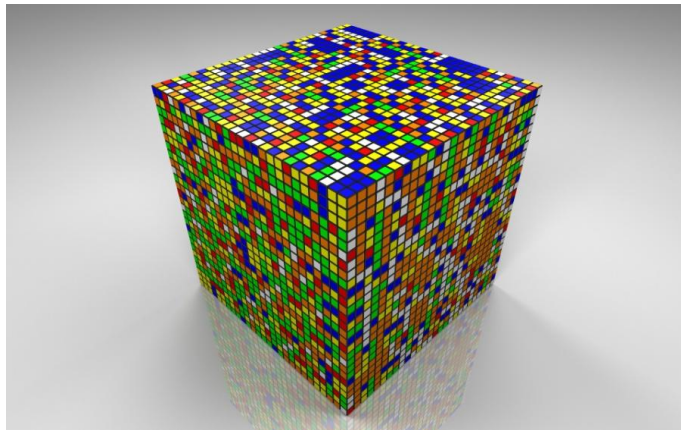
A og B inntreffer ALDRI samtidig.

Ingen felles elementer.

Figur A.5: A og B er disjunkt.

Tillegg B

Kombinatorikk



Figur B.1: Kombinatorikk.

B.1 Koblinger

Definisjon: (koblinger)

Koblinger = forhold som gjør at et bestemt valg kan påvirke utfallet av andre valg vi skal gjøre.



Grunnprinsipp i kombinatorikk: (antagelse)

Ingen kobling mellom mellom valgmulighetene. (Med koblinger blir det fort vanskelig).

Eksempel: (gutter og jenter)

I en klasse er det 1 gutt og 15 jenter. Vi skal velge et par, en jente og en gutt. Dersom valget av jenta ikke påvirker valget av gutten, så er:

$$\underline{\underline{\text{antall mulige valg}}} = 1 \cdot 15 = \underline{\underline{15}} \quad (\text{B.1})$$

Altså det er 15 mulige forskjellige par i klassen.



Eksempel: (gutter og jenter)

I en klasse er det 2 gutter og 15 jenter. Vi skal velge et par, en jente og en gutt. Dersom valget av jenta ikke påvirker valget av gutten, så er:

$$\underline{\underline{\text{antall mulige valg}}} = 2 \cdot 15 = \underline{\underline{30}} \quad (\text{B.2})$$

Altså det er 30 mulige forskjellige par i klassen.



Figur B.2: Gutter og jenter.

Eksempel: (fotballtipping)

I fotballtipping er det 3 muligheter, H, U og B. Det er 12 kamper på en kupong.

antall mulige valg = $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{12 \text{ stk.}} = 3^{12} = \underline{\underline{531\,441}}$ (B.3)

(Dette er et eksempel på et **ordnet** utvalg *med* tilbakelegging.
I neste avsnitt kaller vi dette “situasjon 1”).

■



Figur B.3: Tippekupong.

Eksemplet på forrige side kan vi *generalisere*:

Kombinasjoner: (uten koblinger)

Dersom vi har

$$\begin{aligned} m_1 &= \text{antall muligheter i valg nr. 1} \\ m_2 &= \text{antall muligheter i valg nr. 2} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ m_N &= \text{antall muligheter i valg nr. } N \end{aligned} \tag{B.4}$$

da er

antall mulige kombinasjoner = $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \dots m_N$ (B.5)

B.2 4 situasjoner (endelig populasjon)

Det kan være vanskelig å telle opp antall elementer i utfallsrommet.
Men dersom:

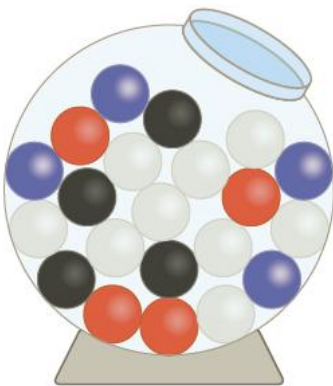
- **uniformt** utfallsrom
- utfallene ikke påvirker hverandre, dvs. de er **uavhengige**

så kan derfor ofte lønne seg å bruke

“**urnemodellen**”

Kommentarer:

- 1) At utfallsrommet er uniformt i forbindelse med urnemodellen betyr at samme sannsynlighet for å trekke kulene i urnen. Altså kulene er **like store**.
- 2) At valgmulighetene er uavhengige i forbindelse med urnemodellen betyr at kulene i urnen er **uavhengige**. Altså kulene er **ikke koplet** på noen måte

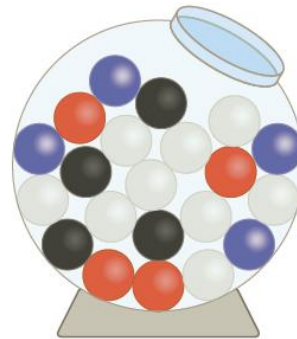


Figur B.4: Urne.

Tenk deg at alle mulige utfall av et eksperiment er representert ved kuler som ligger i en urne. Så trekker vi kuler etter tur.

Da må vi skille mellom:

- er det trekking med eller uten tilbakelegging?
- betyr det noe i hvilken rekkefølge kulene trekkes?



	trekning	
	m/tilbakelegging	u/tilbakelegging
ordnet	situasjon 1	situasjon 2
ikke-ordnet	situasjon 4 (forekommer sjelden)	situasjon 3

Figur B.5: 4 situasjoner for urnemodellen.

1) Ordnet utvalg med tilbakelegging: (situasjon 1)

- rekkefølge har **betydning**: 1, 3 er forskjellig fra 3, 1
- legger tilbake trukket element
- kombinasjonen 1, 1 er da fullt mulig, dvs. et element kan være med flere ganger

2) Ordnet utvalg uten tilbakelegging: (situasjon 2)

- rekkefølge har **betydning**: 1, 3 er forskjellig fra 3, 1
- legger ikke tilbake trukket element
- kombinasjonen 1, 1 er da umulig, dvs. ingen element kan være med flere ganger

3) Ikke-ordnet utvalg uten tilbakelegging: (situasjon 3)

- rekkefølge har ikke betydning: 1, 3 er samme som 3, 1
- legger ikke tilbake trukket element
- kombinasjonen 1, 1 er da umulig, dvs. ingen element kan være med flere ganger

4) Ikke-ordnet utvalg med tilbakelegging: (situasjon 4)

- rekkefølge har ikke betydning: 1, 3 det samme som 3, 1
- legger tilbake trukket element
- kombinasjonen 1, 1 er da fullt mulig, dvs. element kan være med flere ganger

Eksempel: (situasjon 1) (**ordnet** utvalg *med* tilbakelegging)

Hvor mange måter kan vi velge ut $s = 5$ personer på fra en gruppe på $N = 20$?

Med tilbakelegging.

Anta at alle $N = 20$ personene har et nummer, og at rekkefølgen betyr noe.

Løsning:

$$\underline{\underline{\# \text{ ordnede komb. m/tilbakelegging}}} = \underbrace{20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20}_{5 \text{ ledd}} = \underbrace{20^5}_{\text{generaliseres lett}} = \underline{\underline{3\,200\,000}} \quad (\text{B.6})$$

■

Eks. i forrige avsnitt, “fotballtipping”, er også et eksempel på situasjon 1 (med $N = 3$ og $s = 12$).

Generelt gjelder: (**situasjon 1**)

$\# \text{ ordnede komb. m/tilbakelegging} = N \cdot N \cdot \dots \cdot N = N^s$	(B.7)
---	-------

hvor

$$N = \underline{\text{totalt}} \text{ antall valgobjekter} \quad (\text{B.8})$$

$$s = \text{antall objekter som } \underline{\text{velges}} \quad (\text{B.9})$$

Eksempel: (situasjon 2) (**ordnet** utvalg *uten* tilbakelegging) ¹

Hvor mange måter kan vi velge ut $s = 5$ personer på fra en gruppe på $N = 20$? *Uten* tilbakelegging. Anta at alle $N = 20$ personene har et nummer, og at **rekkefølgen betyr noe**.

Løsning:

$$\underline{\underline{\# \text{ ordnede komb. u/tilbakelegging}}} = \underbrace{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}_{5 \text{ ledd}} = \underbrace{\frac{20!}{(20-5)!}}_{\text{generaliseres lett}} = \underline{\underline{1\,860\,480}} \quad (\text{B.10})$$

■

Generelt gjelder: (situasjon 2)

$\# \text{ ordnede komb. u/tilbakelegging} = N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-s+1) = \frac{N!}{(N-s)!} \quad (\text{B.11})$

hvor

$$N = \text{totalt antall valgobjekter} \quad (\text{B.12})$$

$$s = \text{antall objekter som velges} \quad (\text{B.13})$$

¹Fakultet: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. I tillegg så definerer vi $0! = 1$ og $1! = 1$.

Eksempel: (situasjon 3) (ikke-ordnet utvalg *uten* tilbakelegging)

Hvor mange måter kan vi velge ut $s = 5$ personer på fra en gruppe på $N = 20$? *Uten* tilbakelegging. Rekkefølgen betyr *ikke* noe.

Løsning:

$$\# \text{ ordnede komb. u/tilbakelegging} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = \underline{1\,860\,480} \quad \left(= \frac{20!}{(20-5)!} \right) \quad (\text{B.14})$$

Hver gang vi velger ut 5 personer så kan disse personene ordnes på $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ forskjellige måter/("rekkefølge"). Antall **ikke-ordnede** kombinasjoner blir derfor:

$$\begin{aligned} \# \text{ ikke-ordnede komb. u/tilbakelegging} &= \frac{\# \text{ ordnede komb. u/tilbakelegging}}{\# \text{ måter å sortere på}} \\ &= \frac{1\,860\,480}{120} = \frac{20!}{\underbrace{(20-5)! \cdot 5!}_{\text{generaliseres lett}}} = \underline{\underline{15\,504}} \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

■

Generelt gjelder: (situasjon 3)

$$\# \text{ ikke-ordnede komb. u/tilbakelegging} = \frac{N!}{(N-s)! s!} \equiv \underbrace{\binom{N}{s}}_{\text{binomialkoeff.}} \quad (\text{B.16})$$

hvor

$$N = \text{totalt antall valgobjekter} \quad (\text{B.17})$$

$$s = \text{antall objekter som velges} \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{N!}{(N-s)! s!} \equiv \underbrace{\binom{N}{s}}_{\text{binomialkoeff.}} \quad (\text{"N over s"}) \quad (\text{B.19})$$

Eksempel: (situasjon 4) (ikke-ordnet utvalg *med* tilbakelegging)

Komplisert situasjon. Forekommer sjelden.

Denne situasjonen, dvs. situasjon 4, er ikke et stort tema i dette kurset.



Oppsummering av de 4 siste eksemplene:

	trekning	
	m/tilbakelegging	u/tilbakelegging
ordnet	situasjon 1: 3.2 mill.	situasjon 2: 1.86 mill.
ikke-ordnet	situasjon 4 (forekommer sjelden)	situasjon 3: 15 504

Figur B.6: $N = 20$ og $s = 5$.

trekning		
	m/tilbakelegging	u/tilbakelegging
ordnet	Situasjon 1: # komb. = N^s	Situasjon 2: # komb. = $\frac{N!}{(N-s)!}$
ikke-ordnet	situasjon 4 (forekommer sjelden) (ikke pensum)	Situasjon 3: # komb. = $\binom{N}{s}$

Disse formlene gjelder for alle s: $s \geq 0$

N = antall elementer totalt

s = antall valgte elementer

s=0:

Ingen valgte elementer.

s=1:

Situasjon 1 = situasjon 2 = situasjon 3 = situasjon 4
 (alle formlene reduserer seg til det samme: # komb. = N)

s ≥ 2:

Formlene er forskjellige.

Figur B.7: Antall kombinasjoner.

B.3 Binomialkoeffisienten

Egenskaper til binomialkoeffisienten $\binom{N}{s}$: (“N over s”)

$$\underbrace{\binom{N}{s}}_{\text{binomialkoeff.}} = \frac{N!}{(N-s)! s!} \quad (\text{B.20})$$

hvor f.eks.

$$s! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (s-2) \cdot (s-1) \cdot s \quad (\text{B.21})$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \quad (\text{B.22})$$

Legg merke til at

$$\binom{N}{0} = \frac{N!}{(N-0)! 0!} = 1 \quad (\text{B.23})$$

$$\binom{N}{1} = \frac{N!}{(N-1)! 1!} = N \quad (\text{B.24})$$

$$\binom{N}{N} = \frac{N!}{(N-N)! N!} = 1 \quad (\text{B.25})$$

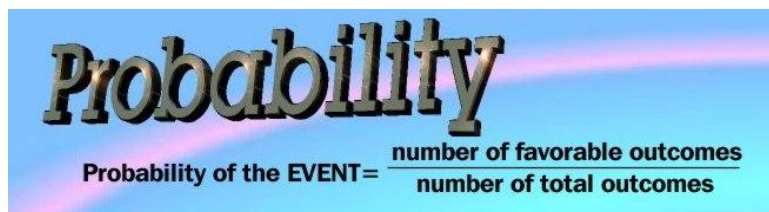
siden $0! = 1$.

B.4 Kombinatoriske sannsynligheter

La oss se på en **tellesituasjon** som kan beskrives med **urnemodellen**. I slike situasjoner er det en sammenheng mellom sannsynlighet og antall kombinasjoner:

La A tilsvare det å trekke kuler av en bestemt type fra urnen. Dette betyr at kulene representerer begivenheten A . Sannsynligheten for å trekke A er da gitt ved: ²

$$P(A) = \frac{\text{antall } \textit{gunstige} \text{ kombinasjoner for } A}{\text{antall } \textit{mulige} \text{ kombinasjoner totalt}} \quad (\text{B.26})$$



Figur B.8: Sannsynlighet og telling.

²Dette er helt analogt med **tellesituasjonen** som vi diskuterte i kapittel 1. Se f.eks. eksempel 3 i kapittel 1.

Eksempel: (fond)

Du velger å investere i 2 av i alt 4 ulike aksjefond. Det er ingen spesiell sammenheng mellom fondene. Derfor velger du fondene tilfeldig.

- 4 fond, 2 velges tilfeldig

- a) Hva er sannsynligheten for at du velger det beste fondet, dvs. $P(\text{beste fondet})$?
- b) Hva er sannsynligheten for at du velger de 2 beste fondene, dvs. $P(2 \text{ beste fondene})$?



Figur B.9: Fond.

Løsning:

Siden

- **uniformt** utfallsrom
- utfallene ikke påvirker hverandre, dvs. de er **uavhengige**

så kan denne tellesituasjonen beskrives ved “**urnemodellen**”.

Den generelle sammenhengen mellom en slik telling og sannsynlighet er, se lign.(B.26):

$$P(A) = \frac{\text{antall } \textit{gunstige} \text{ kombinasjoner for } A}{\text{antall } \textit{mulige} \text{ kombinasjoner totalt}} \quad (\text{B.27})$$

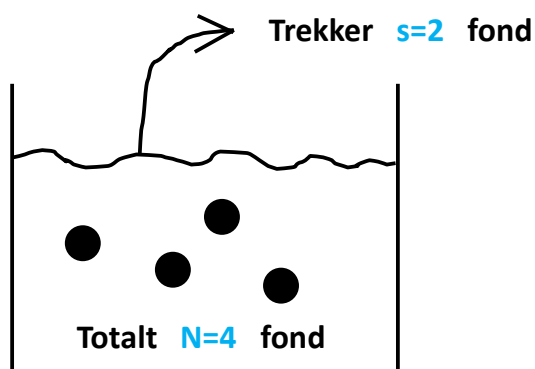
for en gitt begivenhet A .

Er dette situasjon 1, 2, 3 eller 4?

Det er totalt $N = 4$ fond. Du velger å investere i $s = 2$ av disse fondene. Det er ingen avhengighet mellom fondene. Derfor spiller ikke rekkefølgen vi trekker fondene på noen rolle. Når et fond er trukket så kan fondet ikke trekkes på nytt, altså ikke tilbakelegging.

Dette tilsvarer derfor:

situasjon 3



Figur B.10: Totalt 4 fond. Trekker 2 fond.

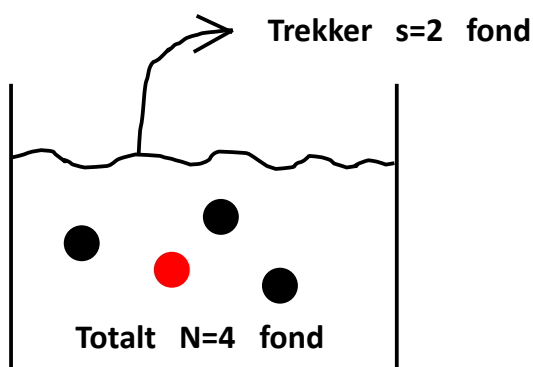
a) $P(\text{beste fondet})$:

Sannsynligheten for å trekke det beste fond er det samme som sannsynligheten for å trekke et *bestemt* fond.

Det er to kategorier: beste fond (rød kule) og ikke beste fond (svarte kuler).
Via lign.(B.27) får vi da:

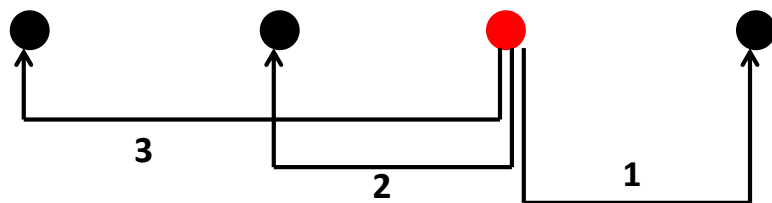
$$\underline{\underline{P(\text{beste fond})}} = \frac{\overbrace{\text{antall } \textit{gunstige} \text{ kombinasjoner}}^{= 3}}{\underbrace{\text{antall } \textit{mulige} \text{ kombinasjoner}}_{= 6}} = \frac{\text{kategori 1} \cdot \text{kategori 2}}{\text{totalt}} \quad (\text{B.28})$$

$$= \frac{\binom{N-1}{s-1} \binom{1}{1}}{\binom{N}{s}} = \frac{\binom{3}{1} \binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{3 \cdot 1}{6} = \underline{\underline{0.50}} \quad (\text{B.29})$$



Figur B.11: Totalt 4 fond. Trekker 2 fond.

Denne figuren visualiserer at det er 3 måter å trekke kuler på hvor en av dem er den røde slik som telleren i lign.(B.29)



Figur B.12: 3 måter.

b) $P(2 \text{ beste fondene})$:

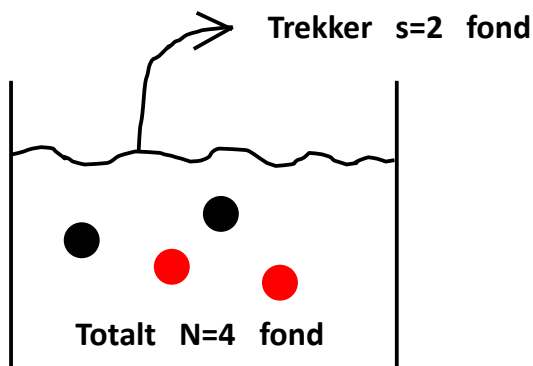
Sannsynligheten for å trekke de 2 beste fondene er det samme som sannsynligheten for å trekke to *bestemte* fond.

Det er to kategorier: beste fond (rød kule) og ikke beste fond (svarte kuler).

Via lign.(B.27) får vi da:

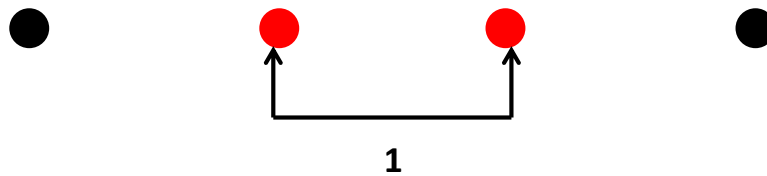
$$\underline{\underline{P(2 \text{ beste fond})}} = \frac{\overbrace{\text{antall } \textit{gunstige} \text{ kombinasjoner}}^{=1}}{\underbrace{\text{antall } \textit{mulige} \text{ kombinasjoner}}_{=6}} = \frac{\text{kategori 1} \cdot \text{kategori 2}}{\text{totalt}} \quad (\text{B.30})$$

$$= \frac{\binom{2}{0} \binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1 \cdot 1}{6} = \underline{\underline{0.167}} \quad (\text{B.31})$$



Figur B.13: Totalt 4 fond. Trekker 2 fond.

Denne figuren visualiserer at det kun er 1 måte å trekke kuler på slik at begge er røde slik som telleren i lign.(B.31):



Figur B.14: 1 måte.

