

Eksempel: (logistikk - total sannsynlighet, tvillingsetningene)

En del ansatte ved Vestbase i Kristiansund tar bussen til jobb. En av disse, Ole Hansen, tar bussrute 1, men må skifte til rute 2 underveis.

Eksperiment:

Ole Hansen tar første rute 1 og observerer om bussen er ledig eller ikke, deretter tar han rute 2 og observerer om den bussen er ledig. La observasjonene være betegnet ved:

$$l_1 \stackrel{\text{def.}}{=} \text{ledige plasser i bussen på rute 1} \quad (1.62)$$

$$\bar{l}_1 \stackrel{\text{def.}}{=} \text{ingen ledige plasser i bussen på rute 1} \quad (1.63)$$

$$l_2 \stackrel{\text{def.}}{=} \text{ledige plasser i bussen på rute 2} \quad (1.64)$$

$$\bar{l}_2 \stackrel{\text{def.}}{=} \text{ingen ledige plasser i bussen på rute 2} \quad (1.65)$$

Utfallsrom:

Utfallsrommet består av alle ordnede par: ²¹

$$\Omega = \left\{ (l_1, l_2), (l_1, \bar{l}_2), (\bar{l}_1, l_2), (\bar{l}_1, \bar{l}_2) \right\} \quad (1.66)$$



Figur 1.13: Buss i Kristiansund.

²¹I prinsipp er dette helt likt med forrige eksempel om graviditet, se lign.(1.54)

Definer begivenhetene:

$$\bar{L}_1 = \left\{ (\bar{l}_1, l_2), (\bar{l}_1, \bar{l}_2) \right\} \quad (\text{ingen ledige plasser i bussen på rute 1}) \quad (1.67)$$

$$\bar{L}_2 = \left\{ (l_1, \bar{l}_2), (\bar{l}_1, \bar{l}_2) \right\} \quad (\text{ingen ledige plasser i bussen på rute 2}) \quad (1.68)$$

$$L_{12} = \left\{ (l_1, l_2) \right\} \quad (\text{begge bussene har ledige sitteplasser}) \quad (1.69)$$

Anta Ole har anslått at:

$$P(\bar{L}_1) = 0.6 \quad (1.70)$$

$$P(\bar{L}_2) = 0.7 \quad (1.71)$$

$$P(L_{12}) = 0.2 \quad (1.72)$$

- a) Definer følgende begivenhet:

$$A = \text{Ole Hansen finner ledige sitteplasser på minst én av bussene} \quad (1.73)$$

Uttrykk A ved hjelp av L_1 og L_2 og bruk den generelle addisjonssetningen til å regne ut $P(A)$.

- b) Definer følgende begivenhet:

$$B = \text{Ole Hansen finner ledige sitteplasser på rute 1, men ikke på rute 2} \quad (1.74)$$

Uttrykk B ved hjelp av L_1 og L_2 og bruk setningen om total sannsynlighet til å regne ut $P(B)$.

- c) Hva er sannsynligheten for at Ole Hansen verken finner ledige sitteplasser på rute 1 eller rute 2?

Løsning:

- a) Begivenheten “*Ole Hansen finner ledige sitteplasser på minst en av bussene*” er lik begivenheten at rute 1 er ledig **eller** rute 2 er ledig.

Uttrykk A ved hjelp av L_1 og L_2 :

$$A = L_1 \cup L_2 \quad (1.75)$$

Generelle addisjonssetningen:

$$P(A) = P(L_1 \cup L_2) \quad (1.76)$$

$$= P(L_1) + P(L_2) - P(L_1 \cap L_2) \quad (1.77)$$

Vi innser at:

$$\underline{L_1 \cap L_2} = \overbrace{\text{Ole Hansen finner ledige sitteplasser på rute 1 og på rute 2}}^{= L_{12}} = \underline{L_{12}} \quad (1.78)$$

Dermed:

$$\underline{P(A)} = P(L_1 \cup L_2) \quad (1.79)$$

$$= P(L_1) + P(L_2) - \textcolor{red}{P(L_1 \cap L_2)} \quad (1.80)$$

$$= \left(1 - P(\bar{L}_1)\right) + \left(1 - P(\bar{L}_2)\right) - \textcolor{red}{P(L_{12})} \quad (1.81)$$

$$= (1 - 0.6) + (1 - 0.7) - 0.2 \quad (1.82)$$

$$= \underline{0.5} \quad (1.83)$$

Sannsynligheten for at Ole Hansen finner ledige sitteplasser på minst en av bussene er dermed er dermed 0.5.

- b) Begivenheten “*Ole Hansen finner ledige sitteplasser på rute men ikke på rute 2*” er lik begivenheten at rute 1 er ledig og rute 2 er ikke ledig, dvs:

$$B = L_1 \cap \bar{L}_2 \quad (1.84)$$

Total sannsynlighet:

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \bar{F}) \quad (1.85)$$

med $E = L_1$ og $F = \bar{L}_2$: ($\bar{\bar{L}_2} = L_2$)

$$\begin{aligned} P(L_1) &= P(\overbrace{L_1 \cap \bar{L}_2}^{=B}) + \overbrace{P(L_1 \cap \bar{\bar{L}_2})}^{=P(L_1 \cap L_2) = P(L_{12})} \\ &\quad \Updownarrow \end{aligned} \quad (1.86)$$

$$\overbrace{P(L_1 \cap \bar{L}_2)}^{=B} = P(L_1) - P(L_{12}) \quad (1.87)$$

Setter inn tall:

$$\underline{P(B)} = P(L_1) - P(L_{12}) \quad (1.88)$$

$$= (1 - P(\bar{L}_1)) - P(L_{12}) \quad (1.89)$$

$$= (1 - 0.6) - 0.2 \quad (1.90)$$

$$= \underline{0.2} \quad (1.91)$$

Sannsynligheten for at Ole Hansen finner ledige sitteplasser på rute 1, men ikke på rute 2 er 0.2.

c) Begivenheten

$$C = \text{Ole Hansen finner } \underline{\text{ingen ledige}} \text{ sitteplasser p\aa{} hverken rute 1 rute 2} \quad (1.92)$$

er den *motsatte* begivenheten til begivenheten at rute 1 *eller* rute 2 er ledig som vi regnet ut i deloppgave a, dvs: ²²

$$C = \overline{L_1} \cap \overline{L_2} = \overline{L_1 \cup L_2} = \overline{A} \quad (1.93)$$

Komplementærsetningen:

$$\underline{P(C)} = P(\overline{A}) \quad (1.94)$$

$$= 1 - P(A) \quad (1.95)$$

$$= 1 - 0.5 \quad (1.96)$$

$$= \underline{0.5} \quad (1.97)$$

Sannsynligheten for at Ole Hansen ikke finner ledige sitteplasser p\aa{} hverken rute 1 eller rute 2 er 0.5.

■

²²Tegn opp et Venn-diagram. Da innser du dette lettere.