

LØSNING: Oppgavesett nr. 1

“MAT110 Statistikk 1”, 2019

Oppgave 1: (økonomi - uniformt utfallsrom , urne , kombinatorikk , $s = 1$)

a) Situasjon 1: (antall komb. = N^s)

$$\underline{\underline{p_{\text{vinn}}}} = \frac{\# \text{ g}}{\# \text{ m}} = \frac{\text{kategori 1} \cdot \text{kategori 2}}{\text{totalt}} \quad (1)$$

$$= \frac{7^1 \cdot 993^0}{1000^1} = \frac{7 \cdot 1}{1000} = \frac{7}{\underline{\underline{1000}}} = 0.007 \quad (2)$$

b) Situasjon 2: (antall komb. = $\frac{N!}{(N-s)!}$)

$$\underline{\underline{p_{\text{vinn}}}} = \frac{\# \text{ g}}{\# \text{ m}} = \frac{\text{kategori 1} \cdot \text{kategori 2}}{\text{totalt}} \quad (3)$$

$$= \frac{\frac{7!}{(7-1)!} \cdot \frac{993!}{(993-0)!}}{\frac{1000!}{(1000-1)!}} = \frac{7 \cdot 1}{1000} = \frac{7}{\underline{\underline{1000}}} = 0.007 \quad (4)$$

c) Situasjon 3: (antall komb. = $\binom{N}{s}$)

$$\underline{\underline{p_{\text{vinn}}}} = \frac{\# \text{ g}}{\# \text{ m}} = \frac{\text{kategori 1} \cdot \text{kategori 2}}{\text{totalt}} \quad (5)$$

$$= \frac{\binom{7}{1} \cdot \binom{993}{0}}{\binom{1000}{1}} = \frac{7 \cdot 1}{1000} = \frac{7}{\underline{\underline{1000}}} = 0.007 \quad (6)$$

d) Ja, situasjonene 1, 2 og 3 sammenfallende når vi kun har ett trekk $s = 1$.

■

Oppgave 2: (revisjon - urne , kombinatoriske sannsynligheter)

Stikkprøvene i oppgaven representerer et uniformt utfallsrom.
Da kan vi bruke urnemodellen.

Oppgaven spør etter sannsynligheten for at ett tilfeldig valgt bilag har feil. Dette tilsvarer $s = 1$.
Fra oppgave 1 foran ser vi da at tilhørende kombinatoriske sannsynlighet er gitt ved:

$$p_{A1} = \frac{\# g}{\# m} = \frac{n_{A1}}{m_{A1}} \quad (7)$$

hvor

$$n_{A1} = \text{antall stikkprøver med bilag som har feil fra første halvår med strategi A} \quad (8)$$

$$m_{A1} = \text{antall stikkprøver i første halvår med strategi A} \quad (9)$$

a) Urnemodell: (se oppgave 1)

$$\underline{\underline{p_{A1}}} = \frac{\# g}{\# m} = \frac{12}{2000} = \underline{\underline{0.006}} \quad (10)$$

$$\underline{\underline{p_{A2}}} = \frac{\# g}{\# m} = \frac{24}{8000} = \underline{\underline{0.003}} \quad (11)$$

b) Urnemodell: (se oppgave 1)

$$\underline{\underline{p_{B1}}} = \frac{\# g}{\# m} = \frac{20}{4000} = \underline{\underline{0.005}} \quad (12)$$

$$\underline{\underline{p_{B2}}} = \frac{\# g}{\# m} = \frac{2}{1000} = \underline{\underline{0.002}} \quad (13)$$

- c) i) $p_{A1} > p_{B1} \Rightarrow \underline{\text{strategi A}}$ er best første halvår.
 ii) $p_{A2} > p_{B2} \Rightarrow \underline{\text{strategi A}}$ er best andre halvår.

Altså strategi A er best for begge årene **hver for seg**.

- d) Strategi A og B når man ser **begge årene under ett**:

$$\underline{p_A} = \frac{\# \text{ g}}{\# \text{ m}} = \frac{12 + 24}{2000 + 8000} = \underline{\underline{0.0036}} \quad (14)$$

$$\underline{p_B} = \frac{\# \text{ g}}{\# \text{ m}} = \frac{20 + 2}{4000 + 1000} = \underline{\underline{0.0044}} \quad (15)$$

Dermed:

$p_A < p_B \Rightarrow \underline{\text{strategi B}}$ er best når man ser begge årene under ett.

- e) Oppgave **2a** og **2b** viser at det er $\overbrace{\text{flere feil}}^{\text{første halvår}}$ i første halvår sammenlignet med andre halvår.

Dersom man skal finne flest feil i løpet at et helt år er det best å tilpasse antall stikkprøver slik at det er flest stikkprøver der hvor det er det er flest feil.

Derfor er strategi B er best tilpasset.

■

Oppgave 3: (økonomi - betinget sannsynlighet , sannsynlighetsregning)

a) Informasjonen oppgitt ovenfor skrevet på *matematisk form*:

$$\underline{\underline{P(\bar{L}|K) = 0.80}} \quad (16)$$

$$\underline{\underline{P(L|\bar{K}) = 0.95}} \quad (17)$$

b) Komplementsetningen for $P(\bar{L}|\bar{K})$:

$$\underline{\underline{P(\bar{L}|\bar{K})}} = 1 - \overbrace{P(L|\bar{K})}^{= 0.95} = 1 - 0.95 = \underline{\underline{0.05}} \quad (18)$$

c) Formelen for total oppsplitting:¹ (se formelsamling/kompendiet)

$$\underline{\underline{P(\bar{L})}} = \overbrace{P(\bar{L}|\bar{K})}^{= 0.05} \overbrace{P(\bar{K})}^{= 1 - P(K) = 0.90} + \overbrace{P(\bar{L}|K)}^{= 0.80} \overbrace{P(K)}^{= 0.10} \quad (19)$$

$$= 0.05 \cdot 0.90 + 0.80 \cdot 0.10 = \underline{\underline{0.125}} \quad (20)$$

¹Splitter altså opp i K og $\bar{K}$

- d) i) Antall bedrifter som klassifiseres som $\overbrace{\text{ikke levedyktig}}^{\bar{L}}$ ifølge modellen til KPMG:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{antall ikke levedyktige bedrifter i 2009 ifølge KPMG}}} &= \underbrace{P(\bar{L})}_{= 0.125} \cdot \underbrace{(\text{antall bedrifter i M\&R})}_{= 1490} \\ &= 0.125 \cdot 1490 = \underline{\underline{186}} \end{aligned} \quad (21)$$

- ii) Antall bedrifter som forventes å gå konkurs ifølge modellen til KPMG:

$$\underline{\underline{\text{antall konkurser i 2009 ifølge KPMG}}} = \underbrace{P(K)}_{= 0.10} \cdot \underbrace{(\text{antall bedrifter i M\&R})}_{= 1490} \quad (22)$$

$$= 0.10 \cdot 1490 = \underline{\underline{149}} \quad (23)$$

- e) Bayes' lov:

$$\underline{\underline{P(K|\bar{L})}}} = \underbrace{P(\bar{L}|K)}_{= 0.80} \cdot \underbrace{\frac{P(K)}{P(\bar{L})}}_{= 0.10} = 0.80 \cdot \frac{0.10}{0.125} = \underline{\underline{0.64}} \quad (24)$$

Konklusjon: Det er 64% sannsynlighet for at en bedrift som av KPMG-modellen klassifiseres som ikke levedyktig, faktisk går konkurs.

■

Oppgave 4: (logistikk - utfallsom , begivenheter , disjunkt , urne , sannsynlighetsregning)

- a) Sannsynlighetene p_i , med $i = 1, 2, 3, \dots, 8$ utgjør en gyldig sannsynlighetsfordeling fordi:

$$\sum_{i=1}^8 p_i = \frac{5}{350} + \frac{40}{350} + \frac{25}{350} + \frac{80}{350} \quad (25)$$

$$+ \frac{8}{350} + \frac{68}{350} + \frac{22}{350} + \frac{102}{350} \quad (26)$$

$$= \frac{150 + 200}{350} = \frac{350}{350} = \underline{\underline{1}} \quad (27)$$

- b) Fra figuren i oppgaven ser vi at de to begivenhetene S_1 og S_2 ikke overlapper.²
Derfor er de disjunkte.

²I likhet med brikkene i et puslespill så overlapper S_1 og S_2 akkurat ikke.

- c) Siden sannsynlighetene $p_1 = \frac{5}{350}$, $p_2 = \frac{40}{350}$ osv. er alle ulike,
altså ikke uniformt utfallsrom, så gjelder ikke urnemodellen for vår sannsynlighetsmodell. ³

- d) Sannsynligheten for at et tilbud blir akseptert:

$$\underline{\underline{P(A)}} = p_1 + p_2 + p_5 + p_6 = \frac{5}{350} + \frac{40}{350} + \frac{8}{350} + \frac{68}{350} = \frac{121}{\underline{\underline{350}}} = 0.3457 \quad (28)$$

- e) Fra første ligningen i oppgaveteksten finner vi:

$$P(S_2 \cap H \cap A) = p_5 = \frac{8}{350} \quad (29)$$

og

$$P(S_2 \cap H) = p_5 + p_7 = \frac{8}{350} + \frac{22}{350} = \frac{30}{350} \quad (30)$$

Dermed har vi det vi trenger for å regne ut den betingede sannsynligheten:

$$\underline{\underline{P(A|S_2 \cap H)}} = \frac{P(S_2 \cap H \cap A)}{P(S_2 \cap H)} = \frac{\frac{8}{\cancel{350}}}{\frac{30}{\cancel{350}}} = \frac{8}{\underline{\underline{30}}} \quad (= 0.2667) \quad (31)$$

³Fra figuren i oppgaven ser vi også at kulene har forskjellige størrelse. Det visualiserer at sannsynlighetene p_i er forskjellige.

f) Tolkning: ⁴

$P(A|S_2 \cap H)$ = sannsynligheten for at et tilbud blir akseptert dersom det er laget av selger 2
og verdien av tilbudet er høy

■

⁴Det er flere måter å formulere seg på her. Løsningsforslaget er bare én mulig formulering.

Oppgave 5: (prognostisering - utfallsrom, begivenheter , sannsynlighetsregning)

a) Tolkning:

$$\underline{\underline{p_1}} = \text{sannsynligheten for at tilbud nr. 1 blir akseptert og alle andre ikke blir akseptert} \quad (32)$$

b) Siden aksept av tilbudene er uavhengige av hverandre så gjelder den spesielle multiplikasjonssetningen. Dermed:

$$\underline{\underline{p_1}} = P((a_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \dots, \bar{a}_{20})) \quad (33)$$

$$= P(A)^1 \cdot P(\bar{A})^{19} \quad (34)$$

$$= \left(\frac{121}{350} \right)^1 \cdot \left(1 - \frac{121}{350} \right)^{19} = \underline{\underline{0.0001092}} \quad (35)$$

c) Sannsynligheten $P(A_1)$ for at kun ett av de 20 tilbudene blir akseptert er:

$$\underline{\underline{P(A_1)}} = \sum_{i=1}^{20} p_i \quad (36)$$

$$= p_1 + p_2 + \dots + p_{20} \quad (37)$$

$$= 20 \cdot p_1 \quad (38)$$

$$= 20 \cdot 0.0001092 = \underline{\underline{0.002184}} \quad (39)$$

altså bare ca. 0.22 % sannsynlighet.

- d) Vi skal finne hvor mange kombinasjoner man kan få med 20 tilbud når 3 av disse skal aksepteres.

Og vi når et tilbud er akseptert så kan det ikke aksepteres en gang til, altså ikke tilbakelegging. Rekkefølgen spiller ingen rolle.

Dermed tilsvarer dette situasjon 3.

Antall kombinasjoner er da gitt ved **binomialkoeffisienten**:

$$\underline{\underline{M}} = \binom{N}{s} = \binom{20}{3} \stackrel{\text{kalkis}}{=} \underline{\underline{1140}} \quad (40)$$

- e) Siden aksept av tilbudene er uavhengige av hverandre så gjelder den spesielle multiplikasjonssetningen. Dermed:

$$\underline{\tilde{p}}_1 = P((a_1, a_2, a_3, \bar{a}_4, \dots, \bar{a}_{20})) \quad (41)$$

$$= P(A)^3 \cdot P(\bar{A})^{17} \quad (42)$$

$$= \left(\frac{121}{350} \right)^3 \cdot \left(1 - \frac{121}{350} \right)^{17} = \underline{\underline{0.00003049}} \quad (43)$$

- f) Sannsynligheten $P(A_3)$ for at 3 av de 20 tilbudene blir akseptert er: ($M = 1140$)

$$\underline{\underline{P(A_3)}} = \sum_{i=1}^M \tilde{p}_i \quad (44)$$

$$= \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \dots + \tilde{p}_{1140} \quad (45)$$

$$= 1140 \cdot \tilde{p}_1 \quad (46)$$

$$= 1140 \cdot 0.00003049 = \underline{\underline{0.03476}} \quad (47)$$

altså bare ca. 3.5 % sannsynlighet.

■