

LØSNING: Oppgavesett nr. 2

“MAT110 Statistikk I”, 2019

Oppgave 1: (økonomi og sport - diskrete stokokastiske variabler , forventning , varians)

a) Siden X har et **tellbart antall verdier** så er den en diskret stokastisk variabel.

b) i) Tolkning:

$$E[X] = \text{forventet antall } \underline{\text{mål}} \text{ som scores av Tufte IL} \\ \underline{\underline{\text{i løpet av tilfeldig valgt kamp}}} \quad (1)$$

ii) Forventning:

$$\underline{\underline{E[X]}} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^7 x_i P(X = x_i) \quad (2)$$

$$= 0 \cdot 0.10 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.20 + 3 \cdot 0.15 \\ + 4 \cdot 0.15 + 5 \cdot 0.05 + 6 \cdot 0.05 + 7 \cdot 0.05 \quad (3)$$

$$= \underline{\underline{2.6}} \quad (4)$$

c) i) Tolkning:

$$Var[X] = \text{forventet variasjon/spredning av antall } \underline{\text{mål}} \text{ som scores av} \\ \underline{\underline{\text{Tufte IL i løpet av tilfeldig valgt kamp}}} \quad (5)$$

ii) “**Varianssetningen**” gir: ¹

$$Var[X] \stackrel{\text{var.setn.}}{=} E[X^2] - E[X]^2 \quad (6)$$

Vi kjenner $E[X]$ fra oppgave **1b**, men mangler $E[X^2]$. Den må vi regne ut:

$$\underline{E[X^2]} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^7 x_i^2 P(X = x_i) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &= 0^2 \cdot 0.10 + 1^2 \cdot 0.25 + 2^2 \cdot 0.20 + 3^2 \cdot 0.15 \\ &+ 4^2 \cdot 0.15 + 5^2 \cdot 0.05 + 6^2 \cdot 0.05 + 7^2 \cdot 0.05 \end{aligned} \quad (8)$$

$$= \underline{10.3} \quad (9)$$

Dette innsatt i “**variasjonssetningen**”:

$$\underline{Var[X]} = E[X^2] - E[X]^2 = 10.3 - (2.6)^2 = \underline{3.54} \quad (10)$$

Alternativt kunne vi også bruke definisjonen av varians direkte.
Det gir selvfølgelig samme svar.

d) Standardavviket er:

$$\underline{\underline{\sigma[X]}} \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{Var[X]} = \sqrt{3.54} \approx \underline{1.88} \quad (11)$$

¹Se kompendium eller formelsamling.

- e) Sannsynligheten for at *Tufte IL* scorer mindre enn 4 mål i en kamp = $P(X < 4)$:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{P(X < 4)}} &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 0.10 + 0.25 + 0.20 + 0.15 = \underline{\underline{0.70}}\end{aligned}\tag{12}$$

$P(X < 4)$ kalles en *kumulative* sannsynlighet.

- f) i) Siden kampene antas å være uavhengige så er sannsynligheten for at det scores mindre enn 4 mål den samme for alle kamper. Derfor spiller det ingen rolle om oppgaven spør om kamp nr. 7 og kamp nr. 24.

Sannsynligheten for å score mindre enn 4 mål i to tilfeldige kamper er:

$$\underline{\underline{P(X_1 < 4, X_2 < 4)}} \stackrel{\text{uavh.}}{=} P(X_1 < 4) P(X_2 < 4) \quad (13)$$

$$= 0.70 \cdot 0.70 = \underline{\underline{0.49}} \quad (14)$$

hvor vi i overgangen overfor har benyttet oss av at kampene er uavhengige, og da er den simultane sannsynligheten bare produktet av sannsynlighetene til hver enkelt kamp.

- ii) Siden kampene antas å være uavhengige så er sannsynligheten for at det scores mindre enn 4 mål den samme for alle kamper. Derfor spiller det ingen rolle om oppgaven spør om kamp nr. 13 og kamp nr. 14.

Svaret er det samme som før, nemlig lign.(14):

$$\underline{\underline{P(X_1 < 4, X_2 < 4)}} = 0.49 \quad (15)$$

- g) i) Som nevnt i forrige oppgave, å se på kamp nr. 15 og 19 er det samme som å se på hvilke som helst to bestemte kamper.
Det er 5 måter å score 4 mål på over to kamper:

$$\begin{aligned}
 P(Y = 4) &= P(X_1 = 4, X_2 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 4) \\
 &+ P(X_1 = 3, X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 3) \\
 &+ P(X_1 = 2, X_2 = 2)
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\stackrel{\text{uavh.}}{=} P(X_1 = 4) P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0) P(X_2 = 4) \tag{17}$$

$$+ P(X_1 = 3) P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) P(X_2 = 3) \tag{18}$$

$$+ P(X_1 = 2) P(X_2 = 2)$$

$$= 0.15 \cdot 0.10 + 0.10 \cdot 0.15 \tag{19}$$

$$+ 0.15 \cdot 0.25 + 0.25 \cdot 0.15 \tag{20}$$

$$+ 0.20 \cdot 0.20 \tag{21}$$

$$= \underline{\underline{0.145}} \tag{22}$$

- ii) Urnemodellen forutsetter at det er *samme sannsynlighet* (uniform sanns.fordeling) for å trekke de forskjellige “kulene” (=utfallene) fra urnen. Her, i vår oppgave, har utfallene

forskjellige sannsynligheter

Derfor kan vi *ikke* bruke formelen

$$\underbrace{P(Y = 4) = \frac{\# \text{ gunstige}}{\# \text{ mulige}} = \frac{5}{64}}_{\text{feil}} \quad (23)$$

- h) B er en stokastisk variabel fordi den er en funksjon av X , hvor X er en stokastisk variabel.²

- i) i) Tolkning:

$$\underline{\underline{E[B] = \text{forventet utbetalt bonus for en tilfeldig valgt kamp}}}$$

- ii) Forventet bonus per kamp:

$$E[B] = E[cX^3] \quad (24)$$

$$= cE[X^3] \quad (25)$$

hvor vi har brukt regnregelen $E[aX] = aE[X]$ fra kompendiet/formalsamlingen.
Finner $E[X^3]$:

$$\underline{E[X^3]} = \sum_{i=0}^7 x_i^3 \cdot P(X = x_i) \quad (26)$$

$$= 0^3 \cdot 0.10 + 1^3 \cdot 0.25 + 2^3 \cdot 0.20 + 3^3 \cdot 0.15 + 4^3 \cdot 0.15 + 5^3 \cdot 0.05 + 6^3 \cdot 0.05 + 7^3 \cdot 0.05 \quad (27)$$

$$= \underline{49.7} \quad (28)$$

Dette setter vi inn i lign.(25):

$$\underline{\underline{E[B]}} = cE[X^3] \quad (29)$$

$$= 500 \cdot 49.7 \text{ NOK} = \underline{\underline{24\,850 \text{ NOK}}} \quad (30)$$

siden $c = 500 \text{ NOK}$.

■

²En funksjon av en tilfeldig variabel er bare en **ny** tilfeldig variabel.

Oppgave 2: (økonomi - kombinatorikk , sannsynlighet , normering , forventning)

a) **Fortjeneste** for studenten (loddarrangøren):

$$\underline{\underline{\text{fortjeneste}}} = \left(1000 \cdot 10 - 7 \cdot 250 \right) \text{ NOK} = \underline{\underline{8\,250 \text{ NOK}}} \quad (31)$$

b) Siden

- uniformt utfallsrom (samme sannsynlighet for å trekke de forskjellige kulene)
- avhengige utfall (kulene er ikke koplet)

så gjelder urnemodellen.

c) Loddkjøperen kjøper 2 lodd av totalt 1000 lodd.

- rekkefølgen spiller **ingen rolle**, dvs. det er ikke-ordnet utvalg
- når et lodd er trukket så legges det ikke tilbake

Alt i alt, ikke-ordnede kombinasjoner u/tilbakelegging: **situasjon 3.**

d) Sannsynligheten for at loddkjøperen $\overbrace{\text{ikke vinner}}^{= 993 \text{ lodd}}$: (2 taperlodd og 0 vinnerlodd)

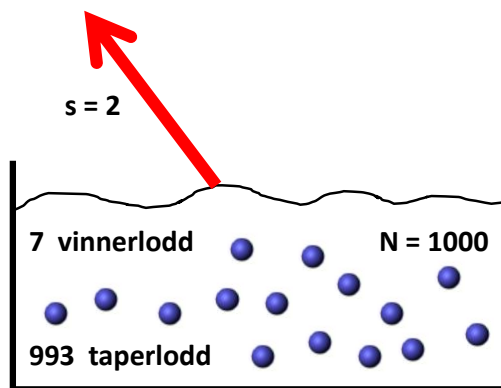
$$\begin{aligned} \underline{\underline{P(\overbrace{X=0}^{0 \text{ vinner , 2 taper})}}} &= \frac{\text{antall } \textit{gunstige} \text{ kombinasjoner}}{\text{antall } \textit{mulige} \text{ kombinasjoner totalt}} \\ &= \frac{\text{kategori 1} \cdot \text{kategori 2}}{\text{antall } \textit{mulige}} = \frac{\binom{993}{2} \cdot \binom{7}{0}}{\binom{1000}{2}} \approx \underline{\underline{0.986}} \quad (32) \end{aligned}$$

- e) Sannsynligheten for at loddkjøperen trekker 1 $\overbrace{\text{vinnerlodd}}^{= 7 \text{ lodd}}$ og 1 $\overbrace{\text{ikke vinnerlodd}}^{= 993 \text{ lodd}}$:
(1 taperlodd og 1 vinnerlodd)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{P(\overbrace{X=1}^{1 \text{ vinner}, 1 \text{ taper})}}}} &= \frac{\text{antall } \textit{gunstige} \text{ kombinasjoner}}{\text{antall } \textit{mulige} \text{ kombinasjoner totalt}} \\ &= \frac{\text{kategori 1} \cdot \text{kategori 2}}{\text{antall } \textit{mulige}} = \frac{\binom{993}{1} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{1000}{2}} \approx \underline{\underline{1.39 \cdot 10^{-2}}} \quad (33) \end{aligned}$$

- f) Sannsynligheten for at begge loddene til kjøperen $\overbrace{\text{vinner}}^{= 7 \text{ lodd}}$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{P(\overbrace{X=2}^{2 \text{ vinner}, 0 \text{ taper})}}}} &= \frac{\text{antall } \textit{gunstige} \text{ kombinasjoner}}{\text{antall } \textit{mulige} \text{ kombinasjoner totalt}} \\ &= \frac{\text{kategori 1} \cdot \text{kategori 2}}{\text{antall } \textit{mulige}} = \frac{\binom{993}{0} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{1000}{2}} \approx \underline{\underline{4.20 \cdot 10^{-5}}} \quad (34) \end{aligned}$$



Figur 1: Urne.

g) Gyldig sannsynlighetsfordeling:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 P(X = x_i) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &\approx 0.986 + 1.39 \cdot 10^{-2} + 4.20 \cdot 10^{-5} \approx \underline{\underline{1}} \end{aligned} \quad (35)$$

Dette kan også vises eksakt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 P(X = x_i) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 1) \\ &= \frac{164\,176}{166\,500} + \frac{2\,317}{166\,500} + \frac{7}{166\,500} \\ &= \frac{164\,176 + 2\,317 + 7}{166\,500} = \frac{166\,500}{166\,500} = \underline{\underline{1}} \end{aligned} \quad (36)$$

h) **i)** Forventet **fortjeneste** til loddkjøperen: ³

$$\begin{aligned}\underline{E[F]} &= E[gX - sp] \\ &= \underline{gE[X] - sp}\end{aligned}\tag{37}$$

Vi mangler bare forventningen $E[X]$. Denne må vi finne:

$$\begin{aligned}\underline{E[X]} &\stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^2 x_i \cdot P(X = x_i) \\ &= x_0 \cdot P(X = 0) + x_1 \cdot P(X = 1) + x_2 \cdot P(X = 2) \\ &\approx 0 \cdot 0.986 + 1 \cdot (1.39 \cdot 10^{-2}) + 2 \cdot (4.20 \cdot 10^{-5}) \\ &= \underline{0.013984}\end{aligned}\tag{38}$$

Dette innsatt i lign.(37):

$$\begin{aligned}\underline{E[F]} &= gE[X] - sp \\ &\approx \left(250 \cdot 0.013984 - 2 \cdot 10 \right) \text{ NOK} \approx \underline{\underline{-16.5 \text{ NOK}}}\end{aligned}\tag{39}$$

ii) Tolkning:

At forventet fortjeneste for loddkjøperen er **negativ** betyr at loddkjøperen **taper** på å kjøpe lodd i det lange løp.

■

³Her bruker vi regnereglene: (a er en konstant)

$$\begin{aligned}E[a + X] &= a + E[X] \\ E[aX] &= aE[X]\end{aligned}$$

Oppgave 3: (logistikk - diskrete stokastiske variabler , forventning , varians)

a) Siden

$$\sum_{i=1}^5 P(X = x_i) = 0.10 + 0.10 + 0.60 + 0.10 + 0.10 = \underline{\underline{1}} \quad (40)$$

dvs. sannsynlighetene summerer seg opp til 1, så er den oppgitte sannsynlighetsfordelingen en **gyldig** fordeling.

b) i) Tolkning:

$$\underline{\underline{E[X] = \text{forventet antall leveringsdager, dvs. forventet leveringstid}}}$$

ii) Forventet leveringstid:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E[X]}} &\stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^5 x_i P(X = x_i) \\ &= 1 \cdot 0.10 + 2 \cdot 0.10 + 3 \cdot 0.60 + 4 \cdot 0.10 + 5 \cdot 0.10 = \underline{\underline{3}} \end{aligned} \quad (41)$$

c) i) Tolkning:

$$\underline{\underline{Var[X] = \text{forventet spredning/variens av antall leveringsdager}}}$$

ii) Variasjon i leveringstid:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{Var[X]}} &\stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^5 \left(x_i - E[X] \right)^2 P(X = x_i) && \text{(definisjon av varians)} \\ &= (1 - 3)^2 \cdot 0.10 + (2 - 3)^2 \cdot 0.10 + (3 - 3)^2 \cdot 0.60 \\ &+ (4 - 3)^2 \cdot 0.10 + (5 - 3)^2 \cdot 0.10 \\ &= \underline{\underline{1}}\end{aligned}\tag{42}$$

iii) Istedet for definisjonen av variansen kan man bruke “**varianssetningen**”.⁴ Da trenger vi $E[X]$ og $E[X^2]$. Vi kjenner $E[X]$ fra oppgave b, men mangler $E[X^2]$. Den må vi regne ut:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{E[X^2]}} &= \sum_{i=1}^5 x_i^2 P(X = x_i) && \text{(definisjon av forventning)} \\ &= 1^2 \cdot 0.10 + 2^2 \cdot 0.10 + 3^2 \cdot 0.60 + 4^2 \cdot 0.10 + 5^2 \cdot 0.10 = \underline{\underline{10}}\end{aligned}\tag{43}$$

Dette innsatt i “**variasjonssetningen**”:

$$\underline{\underline{Var[X]}} \stackrel{\text{var. setn.}}{=} E[X^2] - E[X]^2 = 10 - 3^2 = \underline{\underline{1}}\tag{44}$$

som selvfølgelig gir samme svar som ved bruk av definisjonen.

d) Standardavviket er:

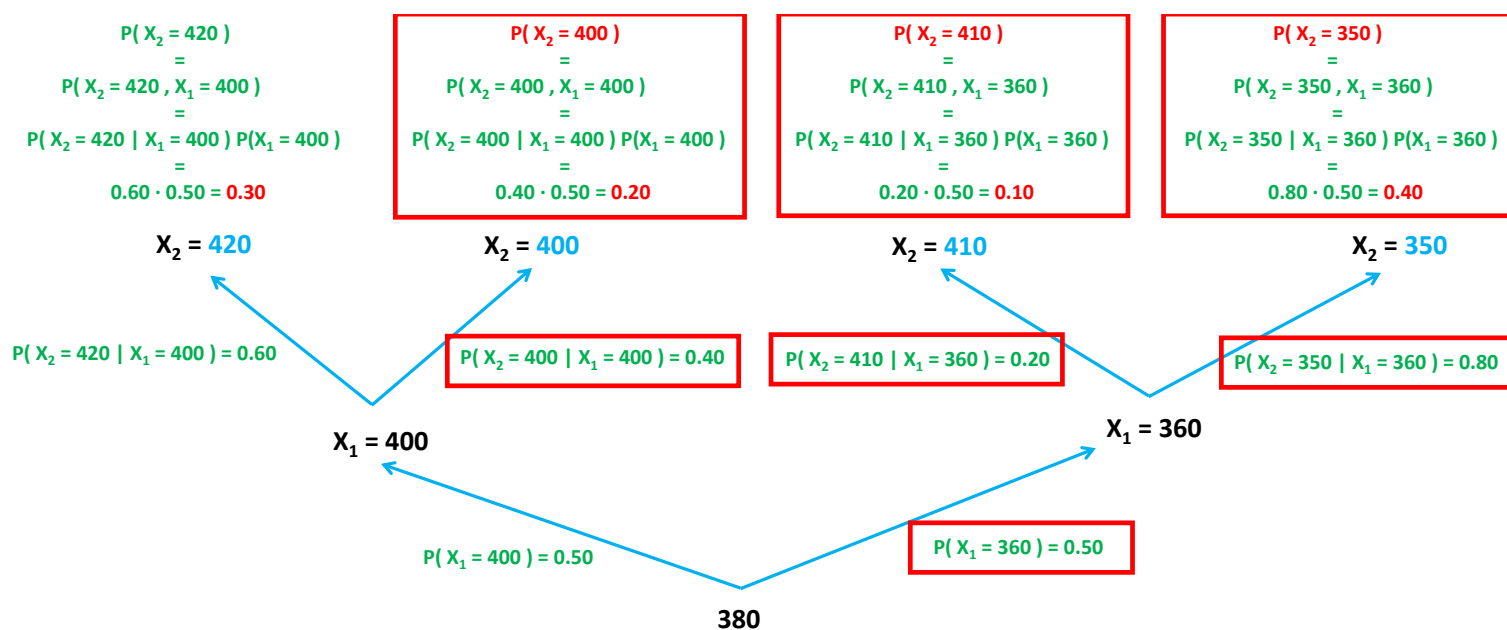
$$\underline{\underline{\sigma[X]}} \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{Var[X]} = \sqrt{1} = \underline{\underline{1}}\tag{45}$$

■

⁴Se kompendium eller formelsamling.

Oppgave 4: (økonomi - betinget sannsynlighet , stokastisk variabel , forventning)

a) Fyller inn / regn ut størrelsene som skal være i de røde boksene i figur 2.



Figur 2: Sannsynlighetstre.

b) Forventet verdi av aksjen etter 2 dager:

$$E[X_2] \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^4 x_{2i} P(X_2 = x_{2i}) \quad (46)$$

$$\begin{aligned} &= 420 \cdot P(X_2 = 420) + 400 \cdot P(X_2 = 400) \\ &+ 410 \cdot P(X_2 = 410) + 350 \cdot P(X_2 = 350) \end{aligned} \quad (47)$$

$$= \left(420 \cdot 0.30 + 400 \cdot 0.20 + 410 \cdot 0.10 + 350 \cdot 0.40 \right) \text{ NOK} \quad (48)$$

$$= \underline{\underline{387 \text{ NOK}}} \quad (49)$$

c) Forventet verdi av formuen $E[F_2]$: ($n = 1000$ aksjer)

$$E[F_2] \stackrel{\text{def.}}{=} n \left(\sum_{i=1}^2 x_{2i} \overbrace{P(X_2 = x_{2i}, X_1 = 400)}^{= P(X_2=x_{2i}, X_1=400)} + x_1 \overbrace{P(X_1 = x_1, X_1 \leq 380)}^{= P(X_1=360)} \right) \quad (50)$$

$$= n \left(420 \cdot P(X_2 = 420, X_1 = 400) + 400 \cdot P(X_2 = 400, X_1 = 400) + 360 \cdot P(X_1 = 360) \right) \quad (51)$$

$$= 1000 \cdot \left(\overbrace{420 \cdot 0.30 + 400 \cdot 0.20}^{\text{verdi ved } t=2} + \overbrace{360 \cdot 0.50}^{\text{verdi ved } t=1} \right) \quad (52)$$

$$= \underline{\underline{386\,000 \text{ NOK}}} \quad (53)$$

d) Tolkning:

$$E[F_2] = \underline{\underline{\text{forventet totalverdi av formuen ved dag nr. 2} \\ \text{når hun følger strategien som angitt}}} \quad (54)$$

■

Oppgave 5: (produksjonsplanlegging , økonomi)

- a) Sannsynligheten for at malingen ikke er defekt etter 1 time er:

$$\underline{\underline{P(\overline{D}_1)}} = 1 - P(D_1) = 1 - 0.30 = \underline{\underline{0.70}} \quad (55)$$

hvor vi har brukt komplementsetningen.

- b) Sannsynligheten for at malingen ikke er defekt etter 2 time dersom vi vet at den var defekt etter 1 timer, er:

$$\underline{\underline{P(\overline{D}_2|D_1)}} = 1 - P(D_2|D_1) = 1 - 0.10 = \underline{\underline{0.90}} \quad (56)$$

hvor vi har brukt komplementsetningen igjen.

- c) Uttrykket $P(\overline{D}_2 \cap D_1)$ er sannsynligheten for at malingen er “*defekt*” etter 1 time og “*ikke defekt*” etter 2 timer, sannsynligheten for at malingen er OK etter 2 timer.

- d) Den generelle multiplikasjonssetningen gir:

$$\underline{\underline{P(\overline{D}_2 \cap D_1)}} = P(\overline{D}_2|D_1)P(D_1) \quad (57)$$

$$= 0.90 \cdot 0.30 = \underline{\underline{0.27}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (58)$$

- e) Vi sannsynlighetstreet som oppgitt i oppgaven finner vi at:

$$\underline{\underline{P(\overline{D}_4 \cap D_3 \cap D_2 \cap D_1)}} = P(\overline{D}_4|D_3 \cap D_2 \cap D_1)P(D_3|D_2 \cap D_1)P(D_2|D_1)P(D_1) \quad (59)$$

$$= 1 \cdot 0.02 \cdot 0.10 \cdot 0.30 = \underline{\underline{0.0006}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (60)$$

- f) Bruker resultatene fra tidligere deloppgaver samt den oppgitte sannsynligheten $P(\overline{D}_3 \cap D_2 \cap D_1) = 0.0294$ til å finne forventet antall timer som Jotun bruker på blanding og justeringer av malingen:

$$\underline{\underline{E[X]}} = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot P(X = x_i) \quad (61)$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot \overbrace{P(\overline{D}_1)}^{= 0.70} + 2 \cdot \overbrace{P(\overline{D}_2 \cap D_1)}^{= 0.27} \\ &+ 3 \cdot \underbrace{P(\overline{D}_3 \cap D_2 \cap D_1)}_{= 0.0294} + 4 \cdot \underbrace{P(\overline{D}_4 \cap D_3 \cap D_2 \cap D_1)}_{= 0.0006} \end{aligned} \quad (62)$$

$$= \left(1 \cdot 0.70 + 2 \cdot 0.27 + 3 \cdot 0.0294 + 4 \cdot 0.0006 \right) \text{ timer}$$

$$= \underline{\underline{1.3306 \text{ timer}}} \quad (63)$$

g) Siden

$$\underline{\underline{\sum_{i=1}^4 P(X = x_i)}} = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4) \quad (64)$$

$$= P(\overline{D_1}) + P(\overline{D_2} \cap D_1) \quad (65)$$

$$+ P(\overline{D_3} \cap D_2 \cap D_1) + P(\overline{D_4} \cap D_3 \cap D_2 \cap D_1)$$

$$= 0.70 + 0.27 + 0.0294 + 0.0006 \quad (66)$$

$$= \underline{\underline{1}} \quad (67)$$

så er sannsynlighetsfordelingen $P(X = x_i)$ en gyldig fordeling.

■

Oppgave 6: (logistikk - sannsynlighetsregning , betinget sannsynlighet , forventning)

a) Aksept-sannsynligheten for tilbud 1 er dermed gitt ved den generelle multiplikasjonssetningen:

$$\underline{\underline{P(A | \overbrace{S_1 \cap \overline{H}}^{\text{vet}})}} = \frac{P(S_1 \cap \overline{H} \cap A)}{P(S_1 \cap \overline{H})} \quad (68)$$

$$= \frac{\frac{40}{600}}{\frac{1200}{600}} = \frac{40}{120} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \quad (69)$$

b) Komplementsetningen gir:

$$\underline{\underline{P(\overline{A} | S_1 \cap \overline{H})}} = 1 - \overbrace{P(A | S_1 \cap \overline{H})}^{= 1/3} \quad (70)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \quad (71)$$

c) Bruker den oppgitte ligningen for forventning:

$$\underline{\underline{E[X_1]}} = n_1 \overbrace{P(Y_1 = 1)}^{P(A | S_1 \cap \overline{H})} \quad (72)$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}} \quad (= 2.67) \quad (73)$$

d) Bruker den oppgitte ligningen for forventning:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{E[X]}} &= n_1 \overbrace{P(Y_1 = 1)}^{P(A|S_1 \cap \bar{H})} + n_2 \overbrace{P(Y_2 = 1)}^{P(A|S_1 \cap H)} \\
&+ n_3 \overbrace{P(Y_3 = 1)}^{P(A|S_2 \cap H)} + n_4 \overbrace{P(Y_4 = 1)}^{P(A|S_2 \cap \bar{H})} \\
&+ n_5 \overbrace{P(Y_5 = 1)}^{P(A|S_3 \cap H)} + n_6 \overbrace{P(Y_6 = 1)}^{P(A|S_3 \cap \bar{H})}
\end{aligned} \tag{74}$$

$$= 8 \cdot \frac{40}{120} + 113 \cdot \frac{5}{30} \tag{75}$$

$$+ 357 \cdot \frac{8}{30} + 16 \cdot \frac{68}{70} \tag{76}$$

$$+ 128 \cdot \frac{12}{40} + 5 \cdot \frac{85}{110} \tag{77}$$

$$= \underline{\underline{165.4}} \tag{78}$$

e) Bruker den oppgitte ligningen for forventning:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{E[V]}} &= v_1 \overbrace{P(Y_1 = 1)}^{P(A|S_1 \cap \bar{H})} + v_2 \overbrace{P(Y_2 = 1)}^{P(A|S_1 \cap H)} \\
 &+ v_3 \overbrace{P(Y_3 = 1)}^{P(A|S_2 \cap H)} + v_4 \overbrace{P(Y_4 = 1)}^{P(A|S_2 \cap \bar{H})} \\
 &+ v_5 \overbrace{P(Y_5 = 1)}^{P(A|S_3 \cap H)} + v_6 \overbrace{P(Y_6 = 1)}^{P(A|S_3 \cap \bar{H})}
 \end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(2\,500 \cdot \frac{40}{120} + 33\,000 \cdot \frac{5}{30} \right. \\
 &\quad + 105\,000 \cdot \frac{8}{30} + 5\,800 \cdot \frac{68}{70} \\
 &\quad \left. + 39\,700 \cdot \frac{12}{40} + 1\,950 \cdot \frac{85}{110} \right) \text{NOK}
 \end{aligned} \tag{80}$$

$$= \underline{\underline{50\,070 \text{ NOK}}} \tag{81}$$

f) Tolkning:

$$\underline{\underline{E[V] = \text{verdien p\aa forventet salg av de 6 tilbudene}}} \tag{82}$$

■

Oppgave 7: (økonomi - simultan sannsynlighet , betinget sannsynlighet , forventning)

a) Forventet pris på den nye iPhone:

$$\underline{E[X]} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^3 x_i P(X = x_i) \quad (83)$$

$$= \textcolor{red}{1000} \underbrace{P(X = \textcolor{red}{10})}_{=0.30} + \textcolor{blue}{1500} \underbrace{P(X = \textcolor{blue}{15})}_{=0.40} + \textcolor{green}{2000} \underbrace{P(X = \textcolor{green}{20})}_{=0.30} \quad (84)$$

$$= \left(\textcolor{red}{1000} \cdot 0.30 + \textcolor{blue}{1500} \cdot 0.40 + \textcolor{green}{2000} \cdot 0.30 \right) \text{ NOK} = \underline{\underline{1500 \text{ NOK}}} \quad (85)$$

Forventet pris er altså 1500 NOK for den nye iPhone.

b) Forventning av etterspørselen Y :

$$\underline{E[Y]} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^3 y_i P(Y = y_i) \quad (86)$$

$$= 90 \underbrace{P(Y = 90)}_{=0.30} + 150 \underbrace{P(Y = 150)}_{=0.40} + 210 \underbrace{P(Y = 210)}_{=0.30} \quad (87)$$

$$= 90 \cdot 0.30 + 150 \cdot 0.40 + 210 \cdot 0.30 = \underline{\underline{150}} \quad (88)$$

Det forventes å selge 150 enheter av den nye iPhone den første uken etter lansering.

c) Siden

$$\text{omsetning} = \underbrace{\text{pris}}_{=X} \times \underbrace{\text{antall solgte varer}}_{=Y} = X Y \quad (89)$$

så er forventet omsetning:

$$\underline{\underline{E[XY]}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i y_j p(x_i, y_j) \quad (90)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\begin{aligned} &\textcolor{red}{1000} \cdot 90 \cdot \overbrace{p(\textcolor{red}{1000}, 90)}^{=0.05} + \textcolor{red}{1000} \cdot 150 \cdot \overbrace{p(\textcolor{red}{1000}, 150)}^{=0.10} + \textcolor{red}{1000} \cdot 210 \cdot \overbrace{p(\textcolor{red}{1000}, 210)}^{=0.15} \\ &+ \textcolor{blue}{1500} \cdot 90 \cdot \overbrace{p(\textcolor{blue}{1500}, 90)}^{=0.10} + \textcolor{blue}{1500} \cdot 150 \cdot \overbrace{p(\textcolor{blue}{1500}, 150)}^{=0.20} + \textcolor{blue}{1500} \cdot 210 \cdot \overbrace{p(\textcolor{blue}{1500}, 210)}^{=0.10} \\ &+ \textcolor{green}{2000} \cdot 90 \cdot \underbrace{p(\textcolor{green}{2000}, 90)}_{=0.15} + \textcolor{green}{2000} \cdot 150 \cdot \underbrace{p(\textcolor{green}{2000}, 150)}_{=0.10} + \textcolor{green}{2000} \cdot 210 \cdot \underbrace{p(\textcolor{green}{2000}, 210)}_{=0.05} \end{aligned} \right) \text{NOK} \\ &= \underline{\underline{219\,000 \text{ NOK}}} \quad (92) \end{aligned}$$

Forventet omsetning er 219 000 NOK den første uken etter lansering.

d) Vi kjenner både $E[X]$ og $E[Y]$ fra oppgave 7b. Produktet av disse er:

$$\underline{\underline{E[X] E[Y]}} = 1500 \cdot 150 \text{ NOK} = \underline{\underline{225\,000 \text{ NOK}}} \quad (93)$$

Fra forrige oppgave vet vi at $E[XY] = 219\,000 \text{ NOK}$. Dermed innser vi at:

$$E[XY] \neq E[X] E[Y] \quad (94)$$

Konklusjon: Nei, X og Y er ikke uavhengige. De er avhengige.

- e) i) Den simultane sannsynlighetsfordelingen $P(X = x, Y = y) = p(x, y)$ er kjent. Se tabell. De marginale sannsynlighetene $P(X = x)$ for $X = 1000$, $X = 1500$ og $X = 2000$ er oppgitt i oppgaven.

Definisjon:

$$\underline{\underline{P(Y = 90|X = 1000)}} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\overbrace{P(X = 1000, Y = 90)}^{\text{tabell } 0.05}}{P(X = 1000)} = \frac{0.05}{0.30} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}} \quad (95)$$

$$\underline{\underline{P(Y = 150|X = 1000)}} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\overbrace{P(X = 1000, Y = 150)}^{\text{tabell } 0.10}}{P(X = 1000)} = \frac{0.10}{0.30} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \quad (96)$$

$$\underline{\underline{P(Y = 210|X = 1000)}} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\overbrace{P(X = 1000, Y = 210)}^{\text{tabell } 0.15}}{P(X = 1000)} = \frac{0.15}{0.30} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \quad (97)$$

- ii) Forventet omsetning når prisen er fastsatt til $X = 1000$ NOK er dermed:

$$\underline{E[XY|X = 1000]} = 1000 \sum_{i=0}^3 y_i P(Y = y_i|X = 1000) \quad (98)$$

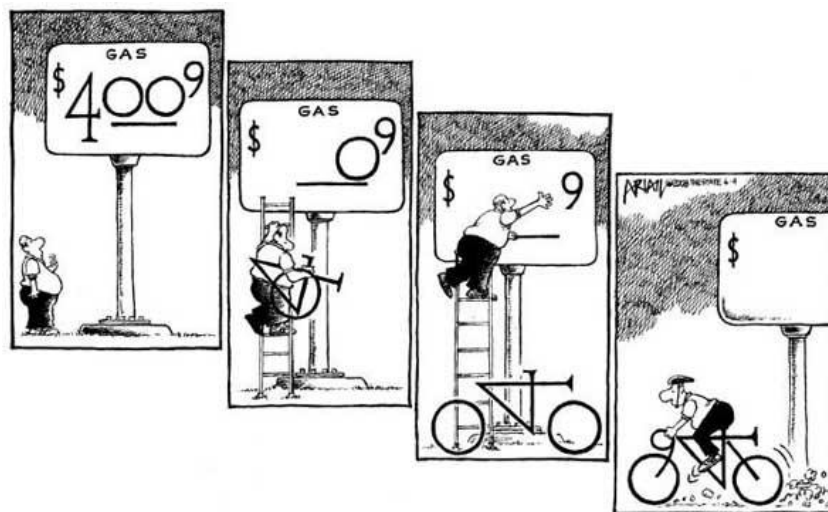
$$= 1000 \left[\begin{aligned} &90 \cdot \overbrace{P(Y = 90|X = 1000)}^{=1/6} + 150 \cdot \overbrace{P(Y = 150|X = 1000)}^{=1/3} \\ &+ 210 \cdot \overbrace{P(Y = 210|X = 1000)}^{=1/2} \end{aligned} \right] \text{NOK} \quad (99)$$

$$= \underline{\underline{170\,000 \text{ NOK}}} \quad (100)$$

Forventet omsetning den første uken etter lansering når prisen er fastsatt til $X = 1000$ NOK er 170 000 NOK.

- f) Nei, det behøver ikke være slik at høyeste pris gir høyest omsetning. Dersom prisen settes for høy så kan etterspørselen gå så mye ned at det går ut over omsetningen.

(Se tegneserien nedenfor.)



Figur 3: Dersom prisen er for høy så finner man alternativer, og omsetningen faller.