

LØSNING: Oppgavesett nr. 4

“MAT110 Statistikk 1”, 2019

Oppgave 1: (logistikk - normalfordeling , forventning , standardavvik)

- a) Figur 1 i oppgavesettet viser sannsynlighetstettheten til en **normal**fordeling. Siden den stokastiske variabelen X er nettopp det, normalfordelt, så kan man lese svaret rett av figuren:

$$\underline{\underline{P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.682}} \quad (1)$$

- b) Også lengden for et tilfeldig valgt rør er **normal**fordelt. Intervallet mellom 8.9 meter og 9.1 meter tilsvarer $\mu - \sigma \leq \text{rørlengde} \leq \mu + \sigma$. Derfor blir svaret det samme som i oppgave **1a**:

$$\underline{\underline{P(8.9 \leq \text{rørlengde} \leq 9.1) = 0.682}} \quad (2)$$

- c) Ja, svaret fra oppgave **1b** stemmer med eksemplet i kompendiet, se kapittel 4.

- d) Intervallet mellom 8.8 meter og 9.2 meter tilsvarer $\mu - 2\sigma \leq \text{rørlengde} \leq \mu + 2\sigma$ for vår **normal**fordelte rørlengde. Ut fra figur 1 i oppgavesettet ser vi da:

$$\underline{\underline{P(8.8 \leq \text{rørlengde} \leq 9.2) = 0.954}} \quad (3)$$

■

Oppgave 2: (økonomi , petroleumslogistikk - $\text{Bin}[n, p]$, $N[\mu, \sigma]$, sum av stok. var.)

- a) Y_i er en binær stokastisk variabel med kun 2 mulige utfall.

For én gitt brønn beskrevet av Y_i dreier det seg kun ett "forsøk", dvs. $n = 1$.
Dermed spiller ikke uavhengighet noen rolle her.
Suksess-sannsynligheten er p .

Dermed er Y_i en binomisk variabel med ett forsøk, dvs.

$$Y_i \sim \underbrace{\text{Bin}[\textcolor{red}{1}, p]}_{= \textcolor{blue}{\text{Ber}}[p]} \quad (4)$$

som også kalles *Bernoulli*-fordelingen fordi de utfallene har verdiene 1 og 0.

- b) Dersom de binære stokastiske variablene Y_i er uavhengige,
så vet vi at summen også er en binomisk fordelt stokastisk variabel med

$$X \sim \text{Bin}[n, p] \quad (5)$$

hvor

$$n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ stk}} \quad (6)$$

c) i) Sannsynligheten for at Shell finner nøyaktig 3 letebrønner:

$$\underline{\underline{P(X = 3)}} = \binom{n}{3} p^3 (1-p)^{n-3} = \binom{15}{3} 0.15^3 (1-0.15)^{15-3} = \underline{\underline{0.2184}} \quad (7)$$

ii) Sannsynligheten for at Shell finner minst 2 letebrønner:

$$\underline{\underline{P(X \geq 2)}} = 1 - P(X \leq 1) \quad (8)$$

$$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \quad (9)$$

$$= 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} - \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} \quad (10)$$

$$= 1 - \binom{15}{0} 0.15^0 (1-0.15)^{15-0} - \binom{15}{1} 0.15^1 (1-0.15)^{15-1} \quad (11)$$

$$= 1 - 0.0874 - 0.2312 = \underline{\underline{0.6814}} \quad (12)$$

d) Siden M er normalfordelt, $M \sim \text{N} [\mu = 1000, \sigma = 200]$, så har vi:

$$\underline{\underline{P(M > 1100)}} = 1 - P(M \leq 1100) \quad (13)$$

$$\stackrel{\text{standardiser}}{=} 1 - P\left(\frac{M - \mu}{\sigma} \leq \frac{1100 - \mu}{\sigma}\right) \quad (14)$$

$$= 1 - P\left(\underbrace{\frac{M - \mu}{\sigma}}_{= Z_M} \leq \underbrace{\frac{1100 - 1000}{200}}_{= 0.5}\right) \quad (15)$$

$$= 1 - G(0.5) \stackrel{\text{tabell}}{=} 1 - 0.6915 \quad (16)$$

$$= \underline{\underline{0.3085}} \quad (17)$$

e) Forventet totalmengde av olje i de 10 brønnene som inneholder olje:

$$\underline{\underline{E[M_{\text{tot}}]}} = E[M_1 + M_2 + \dots + M_{10}] \quad (18)$$

$$\stackrel{\text{uansett}}{=} E[M_1] + E[M_2] + \dots + E[M_{10}] \quad (19)$$

$$= 10 \cdot E[M] \quad (20)$$

$$= 10 \cdot 1000 = \underline{\underline{10\,000}} \quad (21)$$

hvor overgangen i lign.(19) gjelder **uansett** om $M_1, M_2 \dots M_{10}$ er uavhengige eller ikke.

Varians:

$$\underline{\underline{Var[M_{\text{tot}}]}} = Var[M_1 + M_2 + \dots + M_{10}] \quad (22)$$

$$\stackrel{\text{uavh.}}{=} Var[M_1] + Var[M_2] + \dots + Var[M_{10}] \quad (23)$$

$$= 10 \cdot Var[M] \quad (24)$$

$$= 10 \cdot 200^2 = \underline{\underline{400\,000}} \quad (25)$$

hvor overgangen i lign.(23) gjelder **kun** fordi $M_1, M_2 \dots M_{10}$ er uavhengige.

- f)** Siden alle M_i er **normal**fordelte og uavhengige ($i = 1, 2, \dots, 10$) så er også summen M_{tot} **normal**fordelt.

I oppgave **2e** fant vi både forventingen og variansen til denne variabelen M_{tot} .
Dermed:

$$\underline{\underline{M_{\text{tot}} \sim \text{N}[\mu = 10\,000, \sigma = 632]}} \quad (26)$$

hvor vi har brukt at standardavviket er

$$\underline{\underline{\sigma[M_{\text{tot}}]}} = \sqrt{Var[M_{\text{tot}}]} = \sqrt{400\,000} \approx \underline{\underline{632}} \quad (27)$$

- g) Sannsynligheten for at den totale mengden ligger i intervallet [9 000, 11 000] finner vi da ved å M_{tot} -standardisere:

$$\underline{\underline{P(9000 \leq M_{\text{tot}} \leq 11\,000)}} = P(M_{\text{tot}} \leq \textcolor{red}{11\,000}) - P(M_{\text{tot}} \leq \textcolor{blue}{9\,000}) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{std}}{=} P\left(\underbrace{\frac{M_{\text{tot}} - E[M_{\text{tot}}]}{\sigma[M_{\text{tot}}]}}_{= Z_{\text{tot}}} \leq \frac{\textcolor{red}{11\,000} - E[M_{\text{tot}}]}{\sigma[M_{\text{tot}}]}\right) \\ &- P\left(\underbrace{\frac{M_{\text{tot}} - E[M_{\text{tot}}]}{\sigma[M_{\text{tot}}]}}_{= Z_{\text{tot}}} \leq \frac{\textcolor{blue}{9\,000} - E[M_{\text{tot}}]}{\sigma[M_{\text{tot}}]}\right) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} &= P\left(Z_{\text{tot}} \leq \underbrace{\frac{11\,000 - 10\,000}{632}}_{= 1.58}\right) \\ &- P\left(Z_{\text{tot}} \leq \underbrace{\frac{9\,000 - 10\,000}{632}}_{= -1.58}\right) \end{aligned} \quad (30)$$

$$= \underbrace{P(Z_{\text{tot}} \leq 1.58)}_{= G(1.58)} - \underbrace{P(Z_{\text{tot}} \leq -1.58)}_{= 1-G(1.58)} \quad (31)$$

$$= G(1.58) - \left(\textcolor{red}{1} - G(1.58)\right) \quad (32)$$

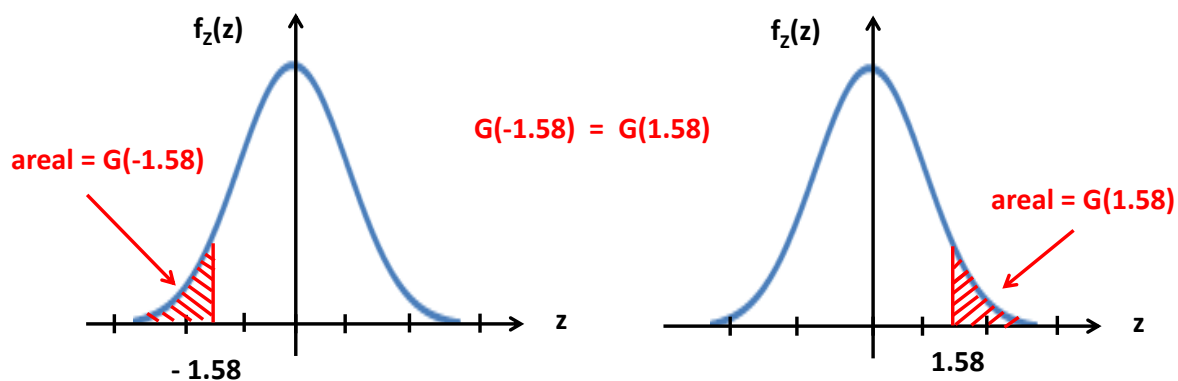
$$\stackrel{\text{tabell}}{=} 2 \cdot 0.9429 - 1 \quad (33)$$

$$= \underline{\underline{0.8858}} \quad (34)$$

I lign.(31) har benyttet oss av at normalfordelingen er [symmetrisk](#) (se figur 1) samt [komplementsetningen](#):

$$\underline{P(Z_{\text{tot}} \leq -1.58)} \stackrel{\text{symmetrisk}}{=} P(Z_{\text{tot}} \geq 1.58) \quad (35)$$

$$\stackrel{\text{komplement}}{=} \underline{1 - P(Z_{\text{tot}} \leq 1.58)} \quad (36)$$



Figur 1: Symmetri.

- h)** Fra oppgave **2d** vet vi at $p = 0.3085$. Det er totalt $n = 10$ brønner hvor det er funnet olje. Siden Y er binomial fordelt så er da $Z \sim \text{Bin}[n = 10, p = 0.3085]$. Dermed:

$$\underline{\underline{P(Z \geq 2)}} = 1 - P(\leq 1) \quad (37)$$

$$= 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1) \quad (38)$$

$$= 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} - \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} \quad (39)$$

$$= 1 - \binom{10}{0} 0.3085^0 (1 - 0.3085)^{10-0} - \binom{10}{1} 0.3085^1 (1 - 0.3085)^{10-1} \quad (40)$$

$$= 1 - 0.0250 - 0.1115 = \underline{\underline{0.8635}} \quad (41)$$

■

Oppgave 3: (logistikk , økonomi , “*avisguttens problem*” - normalfordeling , CLT) ¹

- a) Her er $P(D = d_i)$ gitt ved en **tabell**. Da er det hensiktsmessig å bruke **definisjonen** av forventningen for å finne forventet etterspørsel av aviser en gitt dag, $E[D]$:

$$\underline{\underline{E[D]}} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^5 d_i P(D = d_i) \quad (42)$$

$$= 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0.15 + 3 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.25 + 5 \cdot 0.15 \quad (43)$$

$$= \underline{\underline{3}} \quad (44)$$

- b) Her er $P(D = d_i)$ gitt ved en **tabell**. Da bruker vi **definisjonen** av varians:

$$\underline{\underline{Var[D]}} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^5 \left(d_i - E[D] \right)^2 P(D = d_i) \quad (45)$$

$$= (0 - 3)^2 \cdot 0.1 + (1 - 3)^2 \cdot 0.05 + (2 - 3)^2 \cdot 0.15 \quad (46)$$

$$+ (3 - 3)^2 \cdot 0.3 + (4 - 3)^2 \cdot 0.25 + (5 - 3)^2 \cdot 0.15 \quad (47)$$

$$= \underline{\underline{2.1}} \quad (48)$$

¹Problemet i denne oppgaven er kjent som “*avisguttens dilemma*” eller “*avisguttens problem*”. Dette grunnleggende problemet beskriver tilbud og etterspørsel i ubalanse.

- c) Når man har variansen så kan man enkelt regne ut standardavviket:

$$\underline{\underline{\sigma[D]}} = \sqrt{\underline{\underline{Var[D]}}} = \sqrt{2.1} = \underline{\underline{1.45}} \quad (49)$$

- d) Minimum av en stokastisk variabel er forsatt en stokastisk variabel.

Alternativt: ²

Siden D er en stokastisk variabel så er høyre siden av ligningen

$$S = \underbrace{\min(D, q)}_{\text{stok. var.}} \quad (50)$$

en stokastisk variabel. Men da må også venstresiden av lign.(50), altså S , være en stokastisk variabel.

²Det er nok at man gir en av forklaringene.

- e) Sannsynlighetsfordelingen er gyldig dersom $\sum_{i=0}^5 P(S = s_i) = 1$.
La oss derfor se om dette er tilfelle:

$$\underline{\underline{\sum_{i=0}^5 P(S = s_i)}} = P(S = 0) + P(S = 1) + \dots + P(S = 5) \quad (51)$$

$$= 0.1 + 0.05 + 0.15 + 0.7 + 0 + 0 = \underline{\underline{1}} \quad (52)$$

- f) i) Her er $P(S = s_i)$ gitt ved en **tabell**. Da kan vi bruke **definisjonen** av forventningen for å finne forventet antall solgte aviser en gitt dag når avisgutten bestiller $q = 3$ aviser:

$$\underline{\underline{E[S]}} = \sum_{i=0}^5 s_i P(S = s_i) \quad (53)$$

$$= 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0.15 + 3 \cdot 0.7 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \quad (54)$$

$$= \underline{\underline{2.45}} \quad (55)$$

- ii) Tolkning: $E[S]$ er forventet antall solgte aviser en gitt dag dersom avisgutten bestiller $q = 3$ aviser.

g) Forklaring: ³

Man kan ikke selge flere aviser enn markedet etterspør.

Derfor vil det alltid være slik at:

$$\overbrace{E[D]}^{\text{etterspørsel}} \geq \overbrace{E[S]}^{\text{salg}} \quad (56)$$

uansett hvor mange aviser q som avisgutten velger å bestille om morgenen.

Siden avisgutten velger å bestille "få" aviser $q = 3$,
dvs. valgt å bestille færre aviser enn det markedet maksimalt etterspør (som er 5),
så er det rimelig at forventet etterspørsel $E[D] = 3$ er større enn
forventet salg $E[S] = 2.45$.

³Ekstrakommentar som man ikke behøver å ha med på innleveringen:

i) $q < 5$:

Dersom avisgutten velger å bestille "få" aviser q , dvs. mindre enn det markedet maksimalt etterspør (5 aviser), så går han tom for aviser på dager med "høyt" salg.

ii) $q = 5$:

Dersom avisgutten velger å bestille like mange aviser som markedet maksimalt etterspør så vil han aldri gå tom for aviser. Dermed er $E[D] = E[S]$, dvs. forventet etterspørsel og forventet salg er det samme.

h) Forventet fortjeneste $E[\pi(q)]$:⁴

$$\underline{E[\pi(S, q)]} = E[pS - cq] = \underline{pE[S] - cq} \quad (59)$$

For tilfellet $q = 3$ er $E[S] = 2.45$, jfr. oppgave **3f**. Med $c = 5$ NOK og $p = 20$ NOK får vi:

$$\underline{\underline{E[\pi(S, q = 3)]}} = (20 \cdot 2.45 - 5 \cdot 3) \text{ NOK} = \underline{\underline{34 \text{ NOK}}} \quad (60)$$

⁴Her bruker vi regneregelene: (a og b er konstanter)

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y] , \quad (57)$$

$$E[a] = a , \quad (58)$$

som man finner i kompendiet / formelsamlingen.

- i) Forventet etterspørsel av aviser en gitt dag for forskjellige gater:

$$\underline{\underline{E[D_{\text{total}}]}} = E[D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_n] \quad (61)$$

$$= \underbrace{E[D_1] + E[D_2] + E[D_3] + \dots + E[D_n]}_{n \text{ stk.}} \quad (62)$$

$$= \underline{\underline{nE[D]}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (63)$$

Merk:

Overgangen i lign.(115) gjelder **alltid**, uansett om D_k 'ene er uavhengige eller ikke.

- j) Siden de stok. variablene D_k er gjensidig **uavhengige**, så er $\overbrace{\text{tilhørende kovarianser lik null.}}^{Cov[D_i, D_j] = 0 \text{ for alle } i \neq j}$.
Variansen blir dermed:

$$\underline{\underline{Var[D_{\text{total}}]}} = Var[D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_n] \quad (64)$$

$$\stackrel{\text{uavh.}}{=} \underbrace{Var[D_1] + Var[D_2] + Var[D_3] + \dots + Var[D_n]}_{n \text{ stk.}} \quad (65)$$

$$= \underline{\underline{nVar[D]}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (66)$$

Merk:

Overgangen i lign.(119) gjelder kun når D_k 'ene er gjensidig **uavhengige**.

k) Å finne standardavviket er bare å ta kvadratroten av variansen:

$$\underline{\underline{\sigma[D_{\text{total}}]}} = \sqrt{\textcolor{red}{Var}[D_{\text{total}}]} \quad (67)$$

$$= \sqrt{\textcolor{red}{nVar}[D]} = \sqrt{n} \underbrace{\sqrt{Var[D]}}_{= \sigma[D]} = \underline{\underline{\sqrt{n} \sigma[D]}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (68)$$

l) Med forutsetningene som oppgitt i oppgaven om at

- D_k er gjensidig uavhengige
- D_k har samme sannsynlighetsfordeling, og dermed samme forventning og varians
- antall D_k 'er er stort nok, i vårt tilfelle er $n = 30$, som kan anses som "stor" (tommelfingerregel)

så gjelder sentralgrensesetningen. Den stokastiske variabelen D_{total} er da tilnærmet normalfordelt:

$$\underline{\underline{D_{\text{total}} \sim N \left[E[\textcolor{red}{D_{\text{total}}}], \sigma[\textcolor{blue}{D_{\text{total}}}] \right]}} = N \left[\textcolor{red}{nE}[D], \sqrt{n} \sigma[\textcolor{blue}{D}] \right] \quad (69)$$

hvor vi har brukt resultatene fra oppgave **3i** og **3k**.

m) I oppgavene foran vet vi at D_{total} er tilnærmet normalfordelt med forventning

$$E[D_{\text{total}}] = n E[D] = 30 \cdot 3 = 90 \quad (70)$$

og standardavvik

$$\sigma[D_{\text{total}}] = \sqrt{n \text{Var}[D]} = \sqrt{30 \cdot 2.1} = 7.94 \quad (71)$$

Dermed løses denne oppgaven med (omvendt) tabelloppslag.⁵

Med innkjøpspris (kostnad for avisgutten) $c = 5$ og utsalgspris $p = 20$ fås:

$$P(D_{\text{total}} \leq q^*) = 1 - \frac{c}{p} \quad (72)$$

$$P(D_{\text{total}} \leq q^*) = 1 - \frac{5}{20} \quad (73)$$

$$P(D_{\text{total}} \leq q^*) = 0.75 \quad (74)$$

$$P\left(\underbrace{\frac{D_{\text{total}} - E[D_{\text{total}}]}{\sigma[D_{\text{total}}]}}_{\equiv Z} \leq \underbrace{\frac{q^* - E[D_{\text{total}}]}{\sigma[D_{\text{total}}]}}_{\equiv z_0}\right) \stackrel{\text{standardiser}}{=} 0.75 \quad (75)$$

$$P(Z \leq z_0) = 0.75 \quad (76)$$

Ved “**omvendt tabelloppslag**” ser vi at $z'_0 = 0.67$ tilsvarende $P(Z' \leq z'_0) = 0.7486$. Videre ser vi at $z''_0 = 0.68$ tilsvarende $P(Z'' \leq z''_0) = 0.7517$. Vi skal ha 0.75, som er ca. *midt i mellom*. Dermed:

$$z_0 = 0.675 \quad (77)$$

⁵Husk at den store tabellen i kompendiet dreier seg KUN om normalfordeling.

Vi løser:

$$z_0 = \frac{q^* - E[D_{\text{total}}]}{\sigma[D_{\text{total}}]} \quad (78)$$

med hensyn på q^* :

$$\underline{q^*} = E[D_{\text{total}}] + z_0 \cdot \sigma[D_{\text{total}}] \quad (79)$$

$$= 90 + 0.675 \cdot 7.94 = \underline{95.36} \quad (80)$$

Avisgutten må bestille $q^* \approx 95$ aviser for å få størst mulig fortjeneste.

- n) Forventet etterspørsel av aviser er $E[D_{\text{total}}] = 90$ per dag.
 Fortjenesten blir størst når avisgutten bestiller $q^* \approx 95$ aviser per dag. Altså

$$\underbrace{\quad}_{= 95} q^* > \underbrace{\quad}_{= 90} E[D_{\text{total}}]$$

dvs. det lønner seg å bestille flere aviser enn det man forventer å selge.
 Dette gir mening fordi:

Man taper mer på tapt salg enn på aviser han ikke får solgt.

Utdypende kommentar: ⁶

Dersom avisgutten brenner inne med for mange aviser så taper han
 “bare” 5 NOK per avis.

Men dersom han har for lite aviser så mister han salg,
 dvs. han mister inntekten $(20 - 5)$ NOK = 15 NOK per avis.

Tapt salg er altså mye dyrere for avisgutten enn å brenne inne med aviser.
 Derfor er det “mindre ille” å brenne inne med aviser enn å gå tom for aviser.
 Det er forklaringen på at han bestiller flere aviser enn han forventer å selge.



⁶Man behøver ikke ha med denne utdypende kommentaren. Det er nok med forklaringen som er innrammet ovenfor.

Oppgave 4: (økonomi)

a) i) Forventet antall solgte biler per dag:

$$\underline{\underline{E[X]}} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^3 x_i \cdot P(X = x_i) \quad (81)$$

$$= \underbrace{0 \cdot P(X=0)}_{=0.50} + \underbrace{1 \cdot P(X=1)}_{=0.30} + \underbrace{2 \cdot P(X=2)}_{=0.15} + \underbrace{3 \cdot P(X=3)}_{=0.05} \quad (82)$$

$$= 0 \cdot 0.50 + 1 \cdot 0.30 + 2 \cdot 0.15 + 3 \cdot 0.05 = \underline{\underline{0.75}} \quad (83)$$

ii) For å finne variansen $Var[X]$ må vi først ha $E[X^2]$:

$$\underline{\underline{E[X^2]}} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^3 x_i^2 \cdot P(X = x_i) \quad (84)$$

$$= \underbrace{0^2 \cdot P(X=0)}_{=0.50} + \underbrace{1^2 \cdot P(X=1)}_{=0.30} + \underbrace{2^2 \cdot P(X=2)}_{=0.15} + \underbrace{3^2 \cdot P(X=3)}_{=0.05} \quad (85)$$

$$= 0^2 \cdot 0.50 + 1^2 \cdot 0.30 + 2^2 \cdot 0.15 + 3^2 \cdot 0.05 = \underline{\underline{1.35}} \quad (86)$$

Dette innsatt i setningen for varians: (se kompendium / formelsamling)

$$\underline{\underline{Var[X]}} = E[X^2] - E[X]^2 = 1.35 - 0.75^2 = \underline{\underline{0.7875}} \quad (87)$$

- b) i) Forventet antall solgte biler per dag i gjennomsnitt over et år:

$$\underline{\underline{E[\bar{X}]}} = E \left[\frac{1}{n} \left(X_1 + X_2 + \dots + X_n \right) \right] \quad (88)$$

$$\stackrel{\text{alltid}}{=} \frac{1}{n} \left(E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n] \right) \quad (89)$$

$$= \frac{1}{n} \left(E[X] + E[X] + \dots + E[X] \right) = \frac{\cancel{n} E[X]}{\cancel{n}} = E[X] = \underline{\underline{0.75}} \quad (90)$$

NB: Overgangen i lign.(88) gjelder alltid. Uansett om de stokastiske variablene X_i er uavhengige eller ikke.

- ii) Variansen til gjennomsnittet av antall solgte biler per dag:

$$\underline{\underline{Var[\bar{X}]}} = Var \left[\frac{1}{n} \left(X_1 + X_2 + \dots + X_n \right) \right] \quad (91)$$

$$\stackrel{\text{uavh.}}{=} \frac{1}{n^2} \left(Var[X] + Var[X] + \dots + Var[X] \right) = \frac{\cancel{n} Var[X]}{\cancel{n}^2} \quad (92)$$

$$= \frac{\underline{Var[X]}}{\underline{n}} = \frac{0.7875}{303} = \underline{\underline{0.0026}} \quad (93)$$

NB: Overgangen i lign.(92) gjelder *kun* fordi de stokastiske variablene X_i er uavhengige.
(Om de hadde vært korrelerte så hadde vi fått et kovariansledd, og utregningen hadde blitt mye mer komplisert).

Legg merke til at $\underline{Var[\bar{X}]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ som betyr at datasettet (antall dager) øker så vil usikkerheten rundt gjennomsnittet gå mot null.

- c) Utfylt versjon av tabellen:

tyngdepunkt		spredning	
$E[X]$	0.75	$\sigma[X]$	0.8874
$E[\bar{X}]$	0.75	$\sigma[\bar{X}]$	0.0510

Figur 2: Utfylt versjon av tabellen.

Kommentar:

Forventingene til $\bar{X}$ og X_i er de samme, dvs.

$$E[\bar{X}] = E[X] \quad (94)$$

mens standardavviket til $\bar{X}$ er mye mindre:

$$\sigma[\bar{X}] \ll \sigma[X] \quad (95)$$

- d) i) Med forutsetningene som formulet i oppgavesettet så gjelder sentralgrensesetningen.

- ii) Ifølge sentralgrensesetningen er da den stokastiske variabelen $\bar{X}$, dvs. gjennomsnittet, normalfordelt

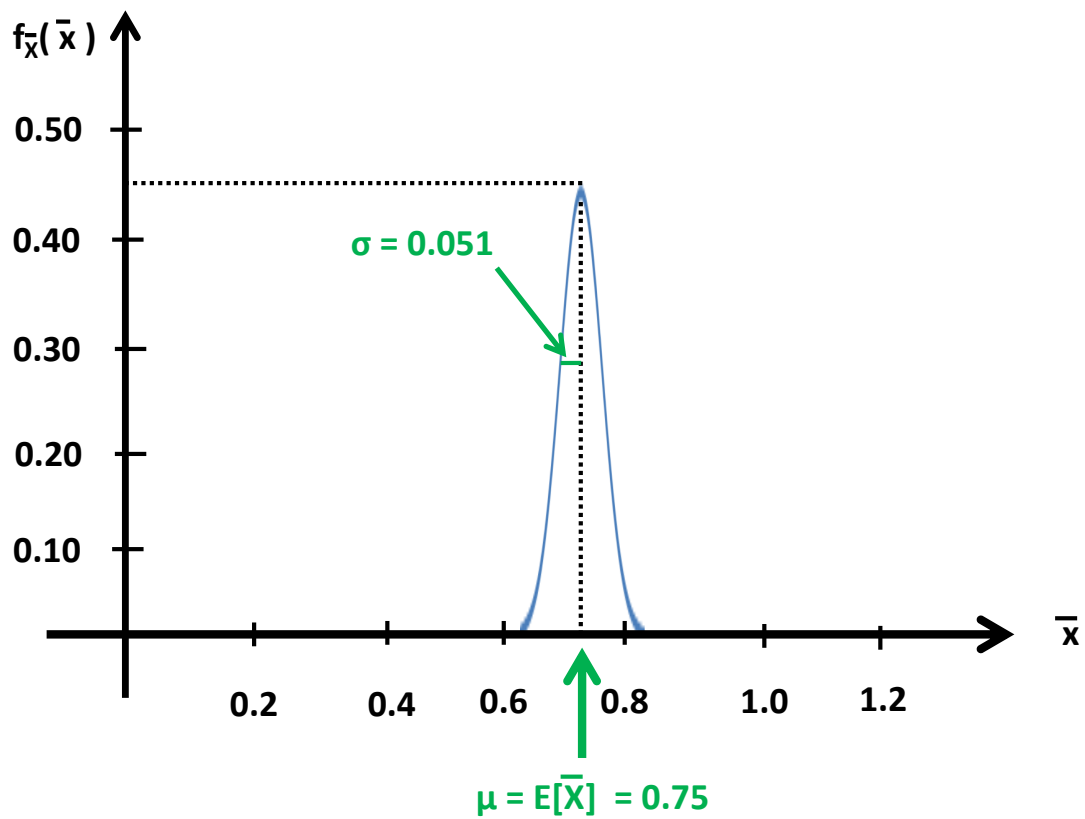
$$\underline{\underline{\bar{X} \sim N[E[\bar{X}], Var[\bar{X}]] = N\left[E[X], \frac{Var[X]}{n}\right]}} \quad (96)$$

- iii) En **tommelfingerregel** for at sentralgrensesetningen skal gjelde er:

$$\underline{\underline{n \gtrsim 30}} \quad (97)$$

dvs. antall forsøk (antall dager) bør være ca. 30 eller mer.

e) Tegner inn tetthetsfunksjonen $f_{\bar{X}}(\bar{x})$:



Figur 3: Tetthetsfunksjonen $f_{\bar{X}}(\bar{x})$.

f) Sannsynligheten for at Slatlem selger mer enn 220 biler i året: (*uten* heltallskorreksjon)

$$\underline{\underline{P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > 220)}} = P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} > \frac{220}{n}\right) \quad (98)$$

$$= P\left(\bar{X} > \frac{220}{n}\right) \quad (99)$$

$$= 1 - P\left(\bar{X} \leq \frac{220}{n}\right) \quad (100)$$

$$\stackrel{\text{standardiser}}{=} 1 - P\left(\underbrace{\frac{\bar{X} - E[\bar{X}]}{\sigma[\bar{X}]}}_{= \bar{Z}} \leq \frac{\frac{220}{n} - E[\bar{X}]}{\sigma[\bar{X}]}\right) \quad (101)$$

$$= 1 - P\left(\bar{Z} \leq \frac{\frac{220}{303} - 0.75}{\sqrt{0.0026}}\right) \quad (102)$$

$$= 1 - P(\bar{Z} \leq -0.47) \quad (103)$$

$$= 1 - \left[1 - P(\bar{Z} \leq 0.47) \right] \quad (104)$$

$$= P(\bar{Z} \leq 0.47) \quad (105)$$

$$= G(0.47) \stackrel{\text{tabell}}{=} \underline{\underline{0.6808}} \quad (106)$$

■

bbbbbbbbbbbbbb

Oppgave 5: (lagerstyring , *SCM200* , logistikk - normalfordeling , sum av stok. var.)

- a) Bestillingspunktet R i det deterministiske tilfellet når etterspørelsen D er konstant er:

$$\underline{R} = DL = 10 \cdot 3 = \underline{30} \quad (107)$$

Altså, når det er $R = 30$ lamper på lager i Danmark så må de gjøre en ny bestilling.

- b) Siden den stokastiske variabelen D_t er oppgitt til å være normalfordelt,

$$D_t \sim \text{N}[\mu_D = 10, \sigma_D = 6] \quad (108)$$

så kan man finne $P(D_t > 15)$ ved standardisering og tabellopslag:

$$\underline{\underline{P(D_t > 15)}} = 1 - P(D_t \leq 15) \quad (109)$$

$$\stackrel{\text{standardiser}}{=} 1 - P\left(\frac{D_t - \mu_D}{\sigma_D} \leq \frac{15 - \mu_D}{\sigma_D}\right) \quad (110)$$

$$= 1 - P\left(\underbrace{\frac{D_t - \mu_D}{\sigma_D}}_{=Z_D} \leq \underbrace{\frac{15 - 10}{6}}_{\approx 0.83}\right) \quad (111)$$

$$= 1 - P(Z_D \leq 0.83) \stackrel{\text{tabell}}{=} 1 - G(0.83) \quad (112)$$

$$= 1 - 0.7967 \stackrel{\text{tabell}}{=} \underline{\underline{0.2033}} \quad (113)$$

- c) Forventningen av etterspørselen av lamper i løpet av ledetiden L :

$$\underline{\underline{E[Y_L]}} = E[D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_L] \quad (114)$$

$$= \underbrace{E[D_1] + E[D_2] + E[D_3] + \dots + E[D_L]}_{L \text{ stk.}} \quad (115)$$

$$= \underbrace{E[D_t]}_{=\mu_D} L \quad (116)$$

$$= \underline{\underline{\mu_D L}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (117)$$

Merk:

Overgangen i lign.(115) gjelder **alltid**, uansett om D_t 'ene er uavhengige eller ikke.

- d) Siden de stokastiske variablene D_t er gjensidig **uavhengige**, så er tilhørende kovarians lik null. Variansen blir dermed:

$$\underline{\underline{Var[Y_L]}} = Var[D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_L] \quad (118)$$

$$\stackrel{\text{uavh.}}{=} \underbrace{Var[D_1] + Var[D_2] + Var[D_3] + \dots + Var[D_L]}_{L \text{ stk.}} \quad (119)$$

$$= \underbrace{Var[D_t]}_{=\sigma_D^2} L \quad (120)$$

$$= \underline{\underline{\sigma_D^2 L}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (121)$$

Merk:

Overgangen i lign.(119) gjelder kun når D_t 'ene er gjensidig **uavhengige**.

NB: Legg merke til at følgende er **FEIL**:

$$\underline{Var[Y_L]} = Var[D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_L] \quad (122)$$

$$\stackrel{\text{feil}}{=} Var[LD_t] = L^2 Var[D_t] = \underline{L^2 Var[D_t]} \quad \text{FEIL!} \quad (123)$$

e) Å finne standardavviket er bare å ta kvadratroten av variansen:

$$\underline{\underline{\sigma[Y_L]}} = \sqrt{Var[Y_L]} \quad (124)$$

$$= \sqrt{\sigma_D^2 L} = \underline{\underline{\sigma_D \sqrt{L}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (125)$$

f) Den stokastiske variabelen Y_L er også normalfordelt:

$$Y_L \sim N[\mu_L, \sigma_L] \quad (126)$$

hvor Y_L har forventning $E[Y_L] = \mu_L = \mu_D L$ og $\sigma[Y_L] = \sigma_L = \sigma_D \sqrt{L}$.
Dermed så standardiserer vi: ($R = 30$, fra oppgave 5b)

$$\underline{P(Y_L > R)} = P(Y_L > 30) \quad (127)$$

$$= 1 - P(Y_L \leq 30)$$

$$\stackrel{\text{standardiser}}{=} 1 - P\left(\frac{Y_L - \mu_L}{\sigma_L} \leq \frac{30 - \mu_L}{\sigma_L}\right) \quad (128)$$

$$= 1 - P\left(\frac{Y_L - \mu_L}{\sigma_L} \leq \frac{30 - \mu_D L}{\sigma_D \sqrt{L}}\right) \quad (129)$$

$$= 1 - P\left(\underbrace{\frac{Y_L - \mu_L}{\sigma_L}}_{=Z_L} \leq \frac{\overbrace{30 - 10 \cdot 3}^{=0}}{6 \cdot \sqrt{3}}\right) \quad (130)$$

$$= 1 - P(Z_L \leq 0) \stackrel{\text{tabell}}{=} 1 - G(0) \quad (131)$$

$$= 1 - 0.50 \stackrel{\text{tabell}}{=} \underline{0.50} \quad (132)$$

Sannsynligheten for “stockout”, dvs. for å gå tomt på lager, er $P(D_L > R) = 0.50$.

PS:

I regningene ovenfor har vi brukt resultatene fra oppgave 5c og 5e:

$$\underline{E[Y_L]} = \mu_L = \mu_D \cdot L = 10 \cdot 3 = \underline{30} \quad (133)$$

$$\underline{\sigma[Y_L]} = \sigma_L = \sigma_D \cdot \sqrt{L} = \underline{6 \cdot \sqrt{3}} \quad (134)$$

- g) Fra oppgaveteksten ser vi at omskalering fra Y_L -variabel til Z -variabel gir sikkerhetsfaktoren $Z_{0.99}$:

$$Z_{0.99} = \frac{R - E[Y_L]}{\sigma[Y_L]} \quad (135)$$

og løser med hensyn på R alene:

$$R = E[Y_L] + Z_{0.99} \sigma[Y_L] \quad (136)$$

Igjen bruker vi resultatene fra oppgave 5c og 5e, nemlig $E[Y_L] = \mu_D L$ og $\sigma[Y_L] = \mu_D \sqrt{L}$. Dermed:

$$\underline{\underline{R = \mu_D L + Z_{0.99} \sigma_D \sqrt{L}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (137)$$

- h) Siden Y_L , og dermed også tilhørende Z , er normalfordelt så finner vi $Z_{0.99}$ ved “[omvendt tabelloppslag](#)”.

I formelsamlingen / kompendiet ser vi at 0.9901 er det som er nærmest 0.99. Dette tilsvarer at *argumentet* er 2.33. Dermed er sikkerhetsfaktoren: ⁷

$$Z_{0.99} = 2.33 \quad (138)$$

Dermed blir det nye sikkerhetsnivået:

$$\underline{R} = \mu_D L + Z_{0.99} \sigma_D \sqrt{L} \quad (139)$$

$$= 10 \cdot 3 + 2.33 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \approx \underline{54} \quad (140)$$

Altså, når antall lamper på lager i Danmark har redusert seg til $R = 54$ lamper så må de gjøre en ny bestilling dersom de skal ha et sikkerhetsnivå på 99 %.

⁷Sikkerhetsfaktoren $Z_{0.99}$ er antall standardavvik vi behøver for å oppnå det ønskede sikkerhetsnivået.

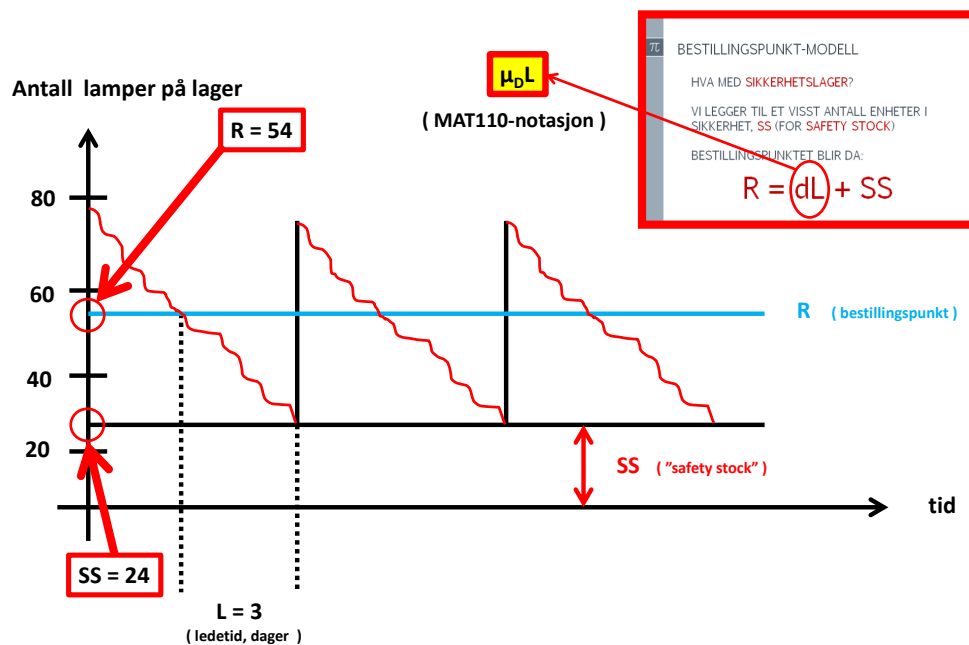
- i) Ekstraleddet i lign.(137) er sikkerhetslageret SS :

$$\underline{SS} = Z_{0.99} \sigma[Y_L] \quad (141)$$

$$= Z_{0.99} \sigma_D \sqrt{L} = 2.33 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \approx \underline{24} \quad (142)$$

Sykehusene i Danmark må ha 24 lamper på lager dersom de skal ha et sikkerhetsnivå på 99 %.

- j) Svarene for sikkerhetslager SS og bestillingspunktet R er markert på den vertikale aksen (y -aksen):



Figur 4: Antall lamper på lager - usikker etterspørsel.

- k) Dersom både etterspørselen D_t og ledetiden L er stokastisk (usikker) så må sikkerhetslageret SS være:

$$\underline{SS} = Z_{0.99} \sigma[Y_L] \quad (143)$$

$$= Z_{0.99} \sqrt{\sigma_D^2 \mu_L + \sigma_L^2 \mu_D} = 2.33 \sqrt{6^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 10} \approx \underline{28} \quad (144)$$

Sykehusene i Danmark må ha 28 lamper på lager dersom de skal ha et sikkerhetsnivå på 99 % når både etterspørselen og ledetiden er stokastisk.

- l) Fra ligningen $\sigma^2[Y_L] = \sigma_D^2 \mu_L + \sigma_L^2 \mu_D$ ser vi at det har blitt lagt til et ekstra ledd pga. usikkerheten i ledetiden L . Denne usikkerheten fører altså til en økning i sikkerhetslageret SS .

■