

Løsning: Oppgavesett nr.5

“SCM200 Lager -og Produksjonsstyring”, vår 2019

Oppgave 1: (masterplan og EOQ)

a) i) Lagernivå og MPS:

Grunnlaget for beregningene er til enhver tid lagerbalanselikningen.

$$\text{inngående lager} + \text{inn på lager} - \text{ut på lager} = \text{utgående lager} \quad (1)$$

Eksempel på utregning lager uke 3:

$$60 + 500 - 210 = 350 \quad (2)$$

Uke		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prognose		150	200	180	250	300	280	280	210	200	200
Ordrer		360	180	210	230	240	120	130	70	0	0
Lagernivå	100	240	60	350	100	300	20	240	30	330	130
Ledig-til-reservasjon											
MPS		500		500		500		500		500	

Tabell 1: Masterplan 10 uker.

Kommentarer:

- Fryst sone betyr at vi kun bruker **ordrene** for å beregne lageret
- Fleksibel sone betyr at vi bruker den **største verdien** av prognosen og ordrene, for å beregne lageret
- Fri sone betyr at vi kun bruker **prognose** for å beregne lageret
- Legg merke til at vi legger inn en ny bestilling hver gang vi vil få stockout.
Dette representerer vår bestillingspolicy. Den er ikke nødvendigvis billig, siden det lett blir store lagerkostnader. Tanken er at vi unngår stockout, som også representerer en kostnad.

ii) Ledig-til-reservasjon:

Uke		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prognose		150	200	180	250	300	280	280	210	200	200
Ordrer		360	180	210	230	240	120	130	70	0	0
Lagernivå	100	240	60	350	100	300	20	240	30	330	130
Ledig-til-reservasjon		60		60		140		300		500	
MPS		500		500		500		500		500	

Tabell 2: Masterplan 10 uker.

Eksempel på utregning "Ledig-til-reservasjon" uke 1:

$$100 + 500 - 360 - 180 = 60 \quad (3)$$

Eksempel på utregning "Ledig-til-reservasjon" uke 3:

$$500 - 210 - 230 = 60 \quad (4)$$

Kommentarer:

- "Ledig-til-reservasjon" er en størrelse som benyttes ved **styring** av masterplanen, og da spesielt når nye ordrer ankommer.
- "Ledig-til-reservasjon" svarer alltid til en **bestilling**.
- Tanken er at når vi har planlagt en bestilling, kan vi allerede begynne å **selge fra denne bestillingen**. Dette salget er representert ved ordreraden. "Ledig-til-reservasjons"-tallet forteller oss da hvor mange enheter vi kan selge frem til *neste bestilling*, som da har en ny "Ledig-til-reservasjon".
- Det initielle steget er spesielt, siden vi må overføre det initielle lageret til "Ledig-til-reservasjonstallet" i første uke. Det initielle lageret overføres fordi "Ledig-til-reservasjonstallet" det tilhørte er historie. Det initielle lageret representerer da hva vi kan love til kundene frem til neste bestilling.

- b) I uke 6 er det kun 140 iPader som er "Ledig-til-reservasjon".
Vi kan derfor ikke love kunden 200 iPader til uke 6. ¹

- c) I uke 2 er det kun 60 iPader som er "Ledig-til-reservasjon".
Vi kan derfor heller ikke love kunden 100 iPader til uke 2. ²

- d) Dataene oppgitt i oppgaven er:

$$P = 2\,000 \text{ NOK} \quad (\text{innkjøpspris for en stk iPad}) \quad (5)$$

$$S = 5\,000 \text{ NOK} \quad (\text{bestillingskostnaden i NOK}) \quad (6)$$

$$r = 0.1 \quad (\text{lagerrenta (årlig)}) \quad (7)$$

som gir den ukentlige lagerkostnaden per iPad:

$$\underline{H} = \frac{r \cdot P}{52} = \frac{0.1 \cdot 2\,000 \text{ NOK}}{52 \text{ uke}} = \underline{3.85 \text{ NOK/uke}} \quad (8)$$

I tillegg til dataene ovenfor så var det også oppgitt i oppgaven at etterspørselen er $D = 225$ iPader per uke.

Optimal ordrestrømrelse er dermed:

$$\underline{\underline{X^*}} = \sqrt{\frac{2SD}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5\,000 \cdot 225}{3.85}} \text{ per uke} = \underline{\underline{765}} \quad (9)$$

antall iPader per uke.

¹Et alternativ er å foreslå om de kan ta 60 i uke 4 og 140 i uke 6. Her er det kun fantasien som begrenser.

²Igjen, et alternativ er å spørre om de kan ta 60 i uke 2 og 40 i uke 3 eller uke 4.

- e) Ukentlige lager- og bestillingskostnader med ordrestørrelse X^* :

$$\underline{C(X^*)} = \frac{DS}{X^*} + H \frac{X^*}{2} \quad (10)$$

$$= \left(\frac{225 \cdot 5000}{765} + 3.85 \frac{765}{2} \right) \text{ NOK} = \underline{2943 \text{ NOK}} \quad (11)$$

Årlige lager- og bestillingskostnader:

$$\underline{\underline{C_{\text{år}}(X^*)}} = 52 C(X^*) = 52 \cdot 2943 \text{ NOK} = \underline{\underline{153\,036 \text{ NOK}}} \quad (12)$$

- f) Bestillingsstørrelse på 765 iPader og en ukentlig etterspørsel på $D = 225$ iPader:

$$\underline{\underline{\text{antall uker mellom hver bestilling}}} = \frac{X^*}{D} = \frac{765}{225} = \underline{\underline{3.4 \text{ uker}}} \quad (13)$$

- g) Ukentlige lager- og bestillingskostnader med ordrestørrelse 500:

$$\underline{\underline{C(500)}} = \frac{DS}{X} + H \frac{X}{2} = \left(\frac{225 \cdot 5000}{500} + 3.85 \frac{500}{2} \right) \text{ NOK} = \underline{\underline{3212.5 \text{ NOK}}} \quad (14)$$

- h) Ja, ordrestørrelsen $X^* = 765$ via EOQ -formelen gir mindre lager- og bestillingskostnader enn ordrestørrelsen 500.

Det er som forventet siden X^* via EOQ -formelen gir minimal lager- og bestillingskostnad under de gitte forutsetningene.

- i) Etterspørselen i masterplanen varierer fra uke til uke.
Man kan innse at bestillingsmønsteret i masterplanen er irregulært.

Forutsetningen for EOQ -formelen er imidlertid en konstant etterspørsel.

Det blir dermed ikke korrekt å sammenlikne disse to.

- j) Data oppgitt i oppgaven:

$$\sigma = 30 \quad \text{standardavviket per dag} \quad (15)$$

$$Z = 2.33 \quad \text{sikkerhetsfaktoren} \quad (16)$$

$$L = 2 \quad \text{ledetiden i antall uker} \quad (17)$$

Sikkerhetslageret er da gitt ved:

$$\underline{\underline{SS}} = Z \sigma \sqrt{L} = 2.33 \cdot \sqrt{2} \cdot 30 = \underline{\underline{99}} \quad (18)$$

- k) I oppgave 1d fant vi den ukentlige lagerkostnaden per iPad:

$$H = 3.85 \text{ NOK/uke} \quad (19)$$

Denne størrelsen trenger man for å regne ut de årlige lagerkostnadene på sikkerhetslageret:

$$\underline{\underline{C_{SS}}} = 52 H S S = 52 \cdot 3.85 \cdot 99 \text{ NOK} = \underline{\underline{19\,790 \text{ NOK}}} \quad (20)$$

- l) Bestillingspunktet er gitt ved:

$$\underline{\underline{R}} = D L + S S = 225 \cdot 2 + 99 = \underline{\underline{549}} \quad (21)$$

Altså når lageret har redusert seg til 549 iPader så bør Ejøp gjøre en ny bestilling.

■

Oppgave 2: (master produksjonsplanlegging - EOQ - eksamen våren 2016)

- a) I oppgaven får vi oppgitt at SENS-merket har konstant aggregert ukentlig etterspørsel lik 4:

$$D_{\text{SENS}} = 4 \quad (\text{ i 100 000 liter per uke }) \quad (22)$$

Etterspørsel D_i per uke for de tre kategoriene $i = 1, 2, 3$ blir da:

$$\underline{\underline{D_1}} = 0.2 \cdot D_{\text{SENS}} = 0.2 \cdot 4 = \underline{\underline{0.8}} \quad (\text{ i 100 000 liter per uke }) \quad (23)$$

$$\underline{\underline{D_2}} = 0.5 \cdot D_{\text{SENS}} = 0.5 \cdot 4 = \underline{\underline{2}} \quad (\text{ i 100 000 liter per uke }) \quad (24)$$

$$\underline{\underline{D_3}} = 0.3 \cdot D_{\text{SENS}} = 0.3 \cdot 4 = \underline{\underline{1.2}} \quad (\text{ i 100 000 liter per uke }) \quad (25)$$

Siden den årlige renten er 10 % så er den ukentlige renten $\frac{10\%}{52}$.

Lagerkostnad H_i for å overlagre 100 000 liter per uke
for de tre kategoriene $i = 1, 2, 3$ er da: ^{3 4}

$$\underline{\underline{H_1}} = \frac{P_1 r}{52} = \frac{40 \cdot 0.1}{52} 100\,000 = \underline{\underline{7\,692}} \quad (\text{ NOK per 100 000 liter per uke }) \quad (26)$$

$$\underline{\underline{H_2}} = \frac{P_2 r}{52} = \frac{60 \cdot 0.1}{52} 100\,000 = \underline{\underline{11\,538}} \quad (\text{ NOK per 100 000 liter per uke }) \quad (27)$$

$$\underline{\underline{H_3}} = \frac{P_3 r}{52} = \frac{50 \cdot 0.1}{52} 100\,000 = \underline{\underline{9\,615}} \quad (\text{ NOK per 100 000 liter per uke }) \quad (28)$$

hvor vi ganger med 100 000 siden oppgaven ber oss om å oppgi lagerkostnaden per 100 000 liter maling.

³Siden rentesatsen $r = 0.1$ er **årlig** må vi dividere med 52 uker for å få **ukentlig** lagerkostnad.

⁴Siden salgsverdien P_i er per liter må vi multiplisere med 100 000 for å få lagerkostnad per 100 000 liter.

Setupkostnad S_i for de tre kategoriene $i = 1, 2, 3$:

$$\underline{\underline{S_1}} = 2C_R + K = 2 \cdot 10\,000 + 5\,000 = \underline{\underline{25\,000}} \quad (\text{NOK per setup}) \quad (29)$$

$$\underline{\underline{S_2}} = 4C_R + K = 4 \cdot 10\,000 + 5\,000 = \underline{\underline{45\,000}} \quad (\text{NOK per setup}) \quad (30)$$

$$\underline{\underline{S_3}} = 3C_R + K = 3 \cdot 10\,000 + 5\,000 = \underline{\underline{35\,000}} \quad (\text{NOK per setup}) \quad (31)$$

hvor vi har brukt at

$$K = 5\,000 \text{ NOK} \quad (32)$$

er faste kostnader og

$$C_R = 10\,000 \text{ NOK per omstillingstime} \quad (33)$$

b) Optimale ordrestørrelser X_i^* for de tre kategoriene $i = 1, 2, 3$:

$$\underline{\underline{X_1^*}} = \sqrt{\frac{2D_1S_1}{H_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.8 \cdot 25\,000}{7692}} = \underline{\underline{2.28}} \quad (\text{i } 100\,000 \text{ liter}) \quad (34)$$

$$\underline{\underline{X_2^*}} = \sqrt{\frac{2D_2S_2}{H_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 45\,000}{11538}} = \underline{\underline{3.95}} \quad (\text{i } 100\,000 \text{ liter}) \quad (35)$$

$$\underline{\underline{X_3^*}} = \sqrt{\frac{2D_3S_3}{H_3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.2 \cdot 35\,000}{9615}} = \underline{\underline{2.96}} \quad (\text{i } 100\,000 \text{ liter}) \quad (36)$$

Den tilhørende totale lager- og setupkostnader for de tre kategoriene er:

$$\underline{C^*} = C(X_1^*) + C(X_2^*) + C(X_3^*) \quad (37)$$

$$= \underline{\left(\frac{S_1D_1}{X_1^*} + \frac{H_1X_1^*}{2} \right) + \left(\frac{S_2D_2}{X_2^*} + \frac{H_2X_2^*}{2} \right) + \left(\frac{S_3D_3}{X_3^*} + \frac{H_3X_3^*}{2} \right)} \quad (38)$$

Man kan sette inn tallene i lign.(??) og regne ut. Det går fint.
Men en smartere måte er følgende:

I optimum er lagerkostnadene og bestillingskostnadene like, dvs.:

$$\frac{S_1 D_1}{X_1^*} = \frac{H_1 X_1^*}{2} \quad (39)$$

og tilsvarende for kategoriene 2 og 3. Totalkostnaden C^* kan derfor skrives:

$$\underline{C^*} = C(X_1^*) + C(X_2^*) + C(X_3^*) \quad (40)$$

$$= \left(\frac{S_1 D_1}{X_1^*} + \frac{H_1 X_1^*}{2} \right) + \left(\frac{S_2 D_2}{X_2^*} + \frac{H_2 X_2^*}{2} \right) + \left(\frac{S_3 D_3}{X_3^*} + \frac{H_3 X_3^*}{2} \right) \quad (41)$$

$$= \left(\frac{H_1 X_1^*}{2} + \frac{H_1 X_1^*}{2} \right) + \left(\frac{H_2 X_2^*}{2} + \frac{H_2 X_2^*}{2} \right) + \left(\frac{H_3 X_3^*}{2} + \frac{H_3 X_3^*}{2} \right) \quad (42)$$

$$= \underline{H_1 X_1^* + H_2 X_2^* + H_3 X_3^*} \quad (43)$$

Til slutt kan vi sett inn tall:

$$\underline{C^*} = (7\,692 \cdot 2.28 + 11\,538 \cdot 3.95 + 9\,615 \cdot 2.96) \text{ NOK per uke} \quad (44)$$

$$= \underline{\underline{91\,573 \text{ NOK per uke}}} \quad (45)$$

per 100 000 liter maling.

c) Omløpstidene for de tre SENS-produktene: ⁵

$$\underline{\underline{O_1}} = \frac{X_1^*}{D_1} = \frac{2.28}{0.8} = \underline{\underline{2.9}} \quad (\text{i antall uker}) \quad (46)$$

$$\underline{\underline{O_2}} = \frac{X_2^*}{D_2} = \frac{3.96}{2} = \underline{\underline{2.0}} \quad (\text{i antall uker}) \quad (47)$$

$$\underline{\underline{O_3}} = \frac{X_3^*}{D_3} = \frac{2.96}{1.2} = \underline{\underline{2.5}} \quad (\text{i antall uker}) \quad (48)$$

d) Omløpstiden er tiden fra lageret fylles til det er tomt.
Omløpstiden $\tilde{O}_2$ for kategori 2 er da:

$$\tilde{O}_2 = O_2^{\text{fylle}} + O_2^{\text{tømme}} \quad (49)$$

$$= \frac{X_2^*}{P_2 - D_2} + \frac{X_2^*}{D_2} \quad (50)$$

hvor X_2^* er optimal ordrestørrelse når vi har produksjonskapasiteten P_2 :

$$\underline{\underline{X_2^*}} = \sqrt{\frac{2D_2S_2}{H_2(1 - \frac{D_2}{P_2})}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 45000}{11538(1 - \frac{2}{3})}} = \underline{\underline{6.84}} \quad (\text{i 100 000 liter}) \quad (51)$$

som gir den totale omløpstiden:

$$\underline{\underline{\tilde{O}_2}} = \frac{6.84}{3 - 2} + \frac{6.84}{2} = 6.84 + 3.42 = \underline{\underline{10.26}} \quad (\text{i antall uker}) \quad (52)$$

■

⁵Omløpstiden er syklustiden, dvs. tiden fra lageret fylles til det er tomt.

Oppgave 3: (bestillingsplan Wagner-Whitin)

a) Data:

$$I_0 = 0 \quad \text{lager fra uke 0 til 1, dvs. lager ved utgangen av uke 0, initielt lager} \quad (53)$$

$$I_4 = 0 \quad \text{lager fra uke 4 til 5, dvs. lager ved utgangen av uke 4, sluttlager} \quad (54)$$

$$D_1 = 3 \quad \text{etterspørsel for uke 1} \quad (55)$$

$$D_2 = 15 \quad \text{etterspørsel for uke 2} \quad (56)$$

$$D_3 = 10 \quad \text{etterspørsel for uke 3} \quad (57)$$

$$D_4 = 5 \quad \text{etterspørsel for uke 4} \quad (58)$$

$$H = 200 \quad \text{overlagringskostnad per enhet per uke} \quad (59)$$

$$S = 5000 \quad \text{bestillingskostnaden for komponenten} \quad (60)$$

b) Variabler:

Vi skal i oppgaven planlegge *antall enheter* som vi skal bestille i hver uke, og hvor mye som skal overlagres til neste uke.

Bestillingsmengde:

$$X_1 = \text{antall enheter bestilt av halvfabrikatet til uke 1} \quad (61)$$

$$X_2 = \text{antall enheter bestilt av halvfabrikatet til uke 2} \quad (62)$$

$$X_3 = \text{antall enheter bestilt av halvfabrikatet til uke 3} \quad (63)$$

$$X_4 = \text{antall enheter bestilt av halvfabrikatet til uke 4} \quad (64)$$

eller på indeksform:

$X_t = \text{antall enheter bestilt av halvfabrikatet til uke } t$

 (65)

hvor $t = 1, 2, 3, 4$.

Lagermengder:

$$I_1 = \text{antall overlagrede enheter fra uke 1 til uke 2} \quad (66)$$

$$I_2 = \text{antall overlagrede enheter fra uke 2 til uke 3} \quad (67)$$

$$I_3 = \text{antall overlagrede enheter fra uke 3 til uke 4} \quad (68)$$

eller på indeksform:

$I_t = \text{antall enheter overlagret fra uke } t \text{ til } t + 1$

 (69)

hvor $t = 1, 2, 3$.

Bestilling eller ikke:

Siden vi har en *bestillingskostnad*, må vi ta høyde for at dersom vi ikke bestiller noen varer for en av ukene, så skal heller ikke bestillingskostnaden være med.

For å kunne uttrykke denne kostnaden må vi definere *binærvariabler* som sier noe om hvorvidt vi skal bestille noe som helst for en gitt uke:

$$Y_1 = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bestiller i uke 1} \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases} \quad (70)$$

$$Y_2 = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bestiller i uke 2} \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases} \quad (71)$$

$$Y_3 = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bestiller i uke 3} \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases} \quad (72)$$

$$Y_4 = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bestiller i uke 4} \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases} \quad (73)$$

eller på indeksform:

$$Y_t = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bestiller i uke } t \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases} \quad (74)$$

hvor $t = 1, 2, 3, 4$.

c) Målfunksjon:

Vi ønsker å lage en bestillingsplan som minimerer *merkostnadene*,
dvs. lagerkostnadene og bestillingskostnadene.

Vi bruker nå variablene sammen med dataene til å uttrykke disse kostnadene.

Totale lagerkostnader: (husk at $I_0 = 0$ og $I_4 = 0$)

$$\underline{C_H} = H \cdot \overbrace{I_0}^{=0} + H \cdot I_1 + H \cdot I_2 + H \cdot I_3 + H \cdot \overbrace{I_4}^{=0} \quad (75)$$

$$= \underline{H \cdot I_1 + H \cdot I_2 + H \cdot I_3} \quad (76)$$

hvor $H = 200$ NOK per enhet per uke.

Bestillingskostnader:

Bestillingskostnader trigges kun dersom vi faktisk bestiller noe.

Det er Y_t -variablene som forteller oss dette.

Total bestillingskostnad er:

$$C_S = S \cdot Y_1 + S \cdot Y_2 + S \cdot Y_3 + S \cdot Y_4 \quad (77)$$

hvor bestillingskostnaden per bestilling er $S = 5000$ NOK.

Målfunksjonen er da gitt som summen:

$$\underline{\underline{C}} = C_H + C_S \quad (78)$$

$$= \left(H \cdot I_1 + H \cdot I_2 + H \cdot I_3 \right) + \left(S \cdot Y_1 + S \cdot Y_2 + S \cdot Y_3 + S \cdot Y_4 \right) \quad (79)$$

$$= \underline{\underline{\sum_{t=1}^3 H I_t + \sum_{t=1}^4 S Y_t}} \quad (80)$$

NB: Det er nok å vise en av linjene over.

d) Føringer:

Lagerbalanse: (etterspørsel)

Likningene for lagerbalansen for de fire ukene er gitt ved:

$$I_0 + X_1 - D_1 = I_1 \quad \text{lagerbalansen for uke 1} \quad (81)$$

$$I_1 + X_2 - D_2 = I_2 \quad \text{lagerbalansen for uke 2} \quad (82)$$

$$I_2 + X_3 - D_3 = I_3 \quad \text{lagerbalansen for uke 3} \quad (83)$$

$$I_3 + X_4 - D_4 = I_4 \quad \text{lagerbalansen for uke 4} \quad (84)$$

eller på indeksform:

$$\boxed{I_{t-1} + X_t - D_t = I_t} \quad (85)$$

hvor $t = 1, 2, 3, 4$.

Logisk føring:

Ingen bestilling, ingen leveranse' kan uttrykkes matematisk på følgende måte:

$$\text{Hvis } \underbrace{Y_t = 0}_{\text{ingen best.}} \quad \text{så må} \quad \underbrace{X_t = 0}_{\text{ingen leveranse}} \quad (86)$$

for alle $t = 1, 2, 3, 4$

Denne typen logisk kan uttrykkes matematisk på to likeverdige måter:

1) Ikke-linær form:

$$(1 - Y_1)X_1 = 0 \quad (87)$$

$$(1 - Y_2)X_2 = 0 \quad (88)$$

$$(1 - Y_3)X_3 = 0 \quad (89)$$

$$(1 - Y_4)X_4 = 0 \quad (90)$$

eller på indeksform:

$$(1 - Y_t)X_t = 0 \quad (91)$$

hvor $t = 1, 2, 3, 4$.

2) Linær form: (M-notasjon)

$$X_1 \leq M \cdot Y_1 \quad (92)$$

$$X_2 \leq M \cdot Y_2 \quad (93)$$

$$X_3 \leq M \cdot Y_3 \quad (94)$$

$$X_4 \leq M \cdot Y_4 \quad (95)$$

eller på indeksform:

$$X_t \leq M \cdot U_t \quad (96)$$

hvor $t = 1, 2, 3, 4$ og M er et stort tall, for eksempel summen av all etterspørsel, dvs. $M = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = \sum_{t=1}^4 D_t$.

NB: Det er nok å at man enten viser føringen på en av formene.

e) Wagner-Whitins algoritme:

Periode 1: (subproblem med kun første periode)

Med en eneste periode, må vi ha produksjon siden vi må oppfylle etterspørselen i periode 1. Vi har altså følgende optimale løsning for dette subproblemet:

$$\underline{C_1^*} = S \cdot Y_1 = \underline{5\,000 \text{ NOK}} \quad (97)$$

Periode 2: (subproblem de 2 første periodene)

Vi har via dominante produksjonsplaner *to* mulige optimale løsninger: C_{11} og C_{10} . Så vi regner ut disse verdiene:

$$\underline{C_2^*} = \min \left[\textcolor{blue}{C_{10}} , \textcolor{red}{C_{x1}} \right] \quad (98)$$

$$= \min \left[(\textit{siste bestilling i } \textcolor{blue}{1.} \textit{ periode}) , (\textit{siste bestilling i } \textcolor{red}{2.} \textit{ periode}) \right] \quad (99)$$

$$= \min \left[\textcolor{blue}{C_1^*} + H \cdot D_2 , \textcolor{red}{C_1^*} + S \right] \quad (100)$$

$$= \min \left[\textcolor{blue}{5\,000} + 200 \cdot 15 , \textcolor{red}{5\,000} + 5\,000 \right] \quad (101)$$

$$= \min \left[\underline{8\,000} , 10\,000 \right] \quad (102)$$

$$= \underline{8\,000 \text{ NOK}} \quad (103)$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er $\textcolor{blue}{C_{10}}$.

Vi vet da at fra Horisontteoremet, siden det er optimalt siste bestilling skjer før 2 periode, så kan vi se bort ifra alle periodene *før* 1.periode. Men vi har ingen, så her tjente vi ikke noe (vi er i det initielle steget)

Periode 3: (subproblem de 3 første periodene)

$$\underline{C}_3^* = \min \left[C_{100} , C_{x10} , C_{xx1} \right] \quad (104)$$

$$= \min \left[(siste bestilling i 1. periode) , (siste bestilling i 2. periode) , \right. \\ \left. (siste bestilling i 3. periode) \right] \quad (105)$$

$$= \min \left[(C_{10} + 2 \cdot H \cdot D_3) , (C_{x1} + H \cdot D_3) , (C_2^* + S) \right] \quad (106)$$

$$= \min \left[(8\,000 + 2 \cdot 200 \cdot 10) , (10\,000 + 200 \cdot 10) , (8\,000 + 5\,000) \right] \quad (107)$$

$$= \min \left[12\,000 , \underline{12\,000} , 13\,000 \right] \quad (108)$$

$$= \underline{12\,000} \text{ NOK} \quad (109)$$

Vi *to* optimale løsninger for dette subproblemet C_{100} og C_{110} som begge gir total kostnad på 12000.

Så *hvilken* skal vi velge for å gå videre?

Siden horisontteoremet slår til på begge løsningene, så velger vi den hvor vi kan *kutte* flest perioder, som er periode 2 (derfor er det strek under andre 12000 over).

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 1. periode fra videre beregninger.

Periode 4: (det fulle problemet)

Vi starter beregningene fra 2 preiode (og ikke første som vi gjorde i delproblemene over). Dette kommer fra bruk av horisontteoremet.

$$\underline{C}_4^* = \min \left[C_{x100} , C_{xx10} , C_{xxx1} \right] \quad (110)$$

$$= \min \left[(siste\ bestilling\ i\ 2.\ period)\ ,\ (siste\ bestilling\ i\ 3.\ period)\ ,\ (siste\ bestilling\ i\ 4.\ period) \right] \quad (111)$$

$$= \min \left[(C_{x10} + 2 \cdot H \cdot D_4) , (C_{xx1} + H \cdot D_4) , (C_3^* + S) \right] \quad (112)$$

$$= \min \left[(12\ 000 + 2 \cdot 200 \cdot 5) , (13\ 000 + 200 \cdot 5) , (12\ 000 + 5\ 000) \right] \quad (113)$$

$$= \min \left[\underline{14\ 000} , \underline{14\ 000} , 17\ 000 \right] \quad (114)$$

$$= \underline{14\ 000\ NOK} \quad (115)$$

Legg merke til at vi har to domintante løsninger:

$$C^* = C_{x100} = C_{1100} \quad (116)$$

$$C^* = C_{xx10} = C_{1010} \quad (117)$$

Vi skal nå finne produksjonsmengdene og lagermengdene (X_t -ene og I_t -ene).

Alternativ 1: $C_{1100} = 14\,000$:

Produksjonsperioder:

$$Y_1 = 1 \quad (118)$$

$$Y_2 = 1 \quad (119)$$

$$Y_3 = 0 \quad (120)$$

$$Y_4 = 0 \quad (121)$$

Produksjonsmengder:

$$X_1 = D_1 = 3 \quad (122)$$

$$X_2 = D_2 + D_3 + D_4 = 15 + 10 + 5 = 30 \quad (123)$$

$$X_3 = 0 \quad (124)$$

$$X_4 = 0 \quad (125)$$

Lagermengder:

$$I_1 = 0 \quad (126)$$

$$I_2 = D_3 + D_4 = 10 + 5 = 15 \quad (127)$$

$$I_3 = D_4 = 5 \quad (128)$$

Alternativ 2: $C_{1010} = 14\,000$:

Produksjonsperioder:

$$Y_1 = 1 \quad (129)$$

$$Y_2 = 0 \quad (130)$$

$$Y_3 = 1 \quad (131)$$

$$Y_4 = 0 \quad (132)$$

Produksjonsmengder:

$$X_1 = D_1 + D_2 = 3 + 15 = 18 \quad (133)$$

$$X_2 = 0 \quad (134)$$

$$X_3 = D_3 + D_4 = 10 + 5 = 15 \quad (135)$$

$$X_4 = 0 \quad (136)$$

Lagermengder:

$$I_1 = D_2 = 15 \quad (137)$$

$$I_2 = 0 \quad (138)$$

$$I_3 = D_4 = 5 \quad (139)$$

f) Wagner-Whitins algoritme:

Nye data:

$$R = 3 \quad \text{bearbeidingstid} \quad (140)$$

$$\bar{R} = 40 \quad \text{maksimalt antall timer tilgjengelig per uke} \quad (141)$$

Nye variabler:

Ingen nye variabler.

Ny målfunksjon:

Målfunksjonen er uendret.

Nye føringar:

Vi har fått en ny *kapasitetsføringar*:

$$3X_1 \leq 40 \quad (142)$$

$$3X_2 \leq 40 \quad (143)$$

$$3X_3 \leq 40 \quad (144)$$

$$3X_4 \leq 40 \quad (145)$$

eller på indeksform:

$$3X_t \leq 40 \quad (146)$$

som er maskinkapasitet for halvfabrikatet i uke t , $t = 1, 2, 3, 4$.

Vi må sjekke om de optimale løsningene vi fant fra Wagner-Within algoritmen i forrige oppgave oppfyller kapasiteten:

Alternativ 1, C_{1100} :

Overskrider kapasiteten i periode 2 hvor produksjonen er 30 halvfabrikater som krever 90 bearbeidingstimer.

Alternativ 2, C_{1010} :

Overskrider kapasiteten i periode 1 hvor produksjonen er 18 halvfabrikater som krever 54 bearbeidingstimer.

Vi kan dermed konkludere med at dersom vi tar med kapasitetsføringene, så gjelder ikke nødvendigvis Wagner-Within algoritmen. Problemet er teoremet om Dominante produksjonsplaner, som flytter *hele* etterspørselsbehov fra en periode til en annen. Da blir det lett kapasitetssprekk i disse periodene, noe som medfører at vi må *splitte* de dominante planene til flere perioder.

■

Oppgave 4: (Wagner-Whitin)

a) Data:

Siden vi har 8 uker i denne modellen bruker vi indeksnotasjon.
Vi har følgende indeks i denne oppgaven:

$$t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (147)$$

hvor t representerer en vilkårlig uke.

Vi har følgende data:

$$I_0 = 0 \quad \text{inngående lagerbeholdning av ordinære ordrer} \quad (148)$$

$$I_8 = 0 \quad \text{utgående lagerbeholdning av ordinære ordrer} \quad (149)$$

$$H = 2 \quad \text{lagerkostnad per enhet fra en uke til neste} \quad (150)$$

$$S = 20\,000 \quad \text{bestillingskostnaden per uke} \quad (151)$$

$$D_t \quad \text{etterspørselen i uke } t \text{ hvor } t = 1, \dots, 8 \quad (152)$$

b) Variabler:

Bestillingsvariabler:

$$X_t = \text{antall iPhoneer bestilt til uke } t \quad (153)$$

hvor $t = 1, \dots, 8$.

Lagervariabler:

$$I_t = \text{overlagring fra uke } t \text{ til uke } t + 1 \quad (154)$$

hvor $t = 1, \dots, 7$.

Bestille/ikke bestille variabler:

$$Y_t = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom legger inn bestilling til uke } t \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases} \quad (155)$$

for alle $t = 1, \dots, 8$.

c) Målfunksjon:

Målfunksjonene er gitt ved bestillingskostnader pluss lagerkostnader summert over hele horisonten:

$$C = \sum_{t=1}^8 SY_t + \sum_{t=1}^7 C_H I_t \quad (156)$$

d) Føringer:

Vi har to typer føringer i denne modellen:

- lagerbalansen
- logisk føring mellom bestilling og antall bestilte iPhoneer

Lagerbalansen:

$$I_{t-1} + X_t - D_t = I_t \quad \text{lagerbalanse for uke } t \quad (157)$$

hvor $t = 1, \dots, 8$.

Logisk føring mellom X_t og Y_t :

$$\text{Hvis } Y_t = 0 \text{ så må } X_t = 0 \quad \text{ingen bestilling, ingen kvanta i uke } t \quad (158)$$

hvor $t = 1, \dots, 8$.

På matematisk form:

$$(1 - Y_t)X_t = 0 \quad \text{ingen bestilling, ingen kvanta i uke } t \quad (159)$$

hvor $t = 1, \dots, 8$.

e) Wagner-Whitins algoritme:

Siden vi for delproblem 4 har at det er optimalt at siste bestilling skjer i uke 3 kan vi ved hjelp av Horisontteoremet, kutte uke 1 og uke 2.

Periode 5: (subproblem de 5 første periodene)

$$\underline{\underline{C_5^*}} = \min \left[C_{xx100} , C_{xxx10} , C_{xxxx1} \right] \quad (160)$$

$$= \min \left[(siste\ bestilling\ i\ 3.\ perioden) , (siste\ bestilling\ i\ 4.\ perioden) , \right. \\ \left. (siste\ bestilling\ i\ 5.\ perioden) \right] \quad (161)$$

$$= \min \left[(C_{xx10} + 2 \cdot H \cdot D_5) , (C_{xxx1} + H \cdot D_5) , (C_4^* + S) \right] \quad (162)$$

$$= \min \left[(50\ 800 + 2 \cdot 2 \cdot 3000) , (55\ 200 + 2 \cdot 3000) , (50\ 800 + 20\ 000) \right] \quad (163)$$

$$= \min \left[62\ 800 , \underline{61\ 200} , 70\ 800 \right] \quad (164)$$

$$= \underline{\underline{61\ 200\ NOK}} \quad (165)$$

Siden vi for delproblem 5 har at det er optimalt at siste bestilling skjer i uke 4 kan vi ved hjelp av Horisontteoremet, kutte uke 3.

Periode 6: (subproblem de 6 første periodene)

$$\underline{\underline{C_6^*}} = \min \left[C_{xxx100} , C_{xxxx10} , C_{xxxxx1} \right] \quad (166)$$

$$= \min \left[(siste\ bestilling\ i\ 4.\ perioden) , (siste\ bestilling\ i\ 5.\ perioden) , \right. \\ \left. (siste\ bestilling\ i\ 6.\ perioden) \right] \quad (167)$$

$$= \min \left[(C_{xxx10} + 2 \cdot H \cdot D_6) , (C_{xxxx1} + H \cdot D_6) , (C_5^* + S) \right] \quad (168)$$

$$= \min \left[(61\ 200 + 2 \cdot 2 \cdot 5000) , (70\ 800 + 2 \cdot 5000) , (61\ 200 + 20\ 000) \right] \quad (169)$$

$$= \min \left[81\ 200 , \underline{80\ 800} , 81\ 200 \right] \quad (170)$$

$$= \underline{\underline{80\ 800\ NOK}} \quad (171)$$

Siden vi for delproblem 6 har at det er optimalt at siste bestilling skjer i uke 5 kan vi ved horisontteoremet kutte uke 4.

Periode 7: (subproblem de 7 første periodene)

$$\underline{\underline{C_7^*}} = \min \left[C_{xxxx100}, C_{xxxxx10}, C_{xxxxxx1} \right] \quad (172)$$

$$= \min \left[\begin{array}{l} (\text{siste bestilling i } 5. \text{ periode}), (\text{siste bestilling i } 6. \text{ periode}), \\ (\text{siste bestilling i } 7. \text{ periode}) \end{array} \right] \quad (173)$$

$$= \min \left[(C_{xxxx10} + 2 \cdot H \cdot D_7), (C_{xxxxx1} + H \cdot D_7), (C_6^* + S) \right] \quad (174)$$

$$= \min \left[(80\,800 + 2 \cdot 2 \cdot 4500), (81\,200 + 2 \cdot 4500), (80\,800 + 20\,000) \right] \quad (175)$$

$$= \min \left[98\,800, \underline{90\,200}, 100\,800 \right] \quad (176)$$

$$= \underline{\underline{90\,200 \text{ NOK}}} \quad (177)$$

Siden vi for delproblem 7 har at det er optimalt at siste bestilling skjer i uke 6 kan vi nå kutte uke 5.

Periode 8: (det fulle problemet)

$$\underline{\underline{C_8^*}} = \min \left[C_{xxxxx100}, C_{xxxxx10}, C_{xxxxxx1} \right] \quad (178)$$

$$= \min \left[(\text{siste bestilling i } 6. \text{ periode}), (\text{siste bestilling i } 7. \text{ periode}), \right. \\ \left. (\text{siste bestilling i } 8. \text{ periode}) \right] \quad (179)$$

$$= \min \left[(C_{xxxxx10} + 2 \cdot H \cdot D_8), (C_{xxxxxx1} + H \cdot D_8), (C_7^* + S) \right] \quad (180)$$

$$= \min \left[(90\,200 + 2 \cdot 2 \cdot 3700), (100\,800 + 2 \cdot 3700), (90\,200 + 20\,000) \right] \quad (181)$$

$$= \min \left[\underline{105\,000}, 108\,200, 110\,200 \right] \quad (182)$$

$$= \underline{\underline{105\,000 \text{ NOK}}} \quad (183)$$

f) Vi har dermed funnet den optimale kostnaden på 105 000 kroner.
 Vi må nå til slutt finne selve bestillingsplanen.
 Dette gjør vi ved å starte bakerst og gå fremover fra subproblem til subproblem
 og lese av hvor siste bestilling inntreffer.

- $C_{xxxxx100}$, siden siste bestilling skjer i uke 6. Vi hopper dermed til delproblem 5.
- $C_{xxx10100}$, siden siste bestilling skjer i uke 4 for delproblem 5. Vi hopper til delproblem 3.
- $C_{10010100}$, siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 3.

Vi har dermed optimal løsning:

$$C^* = C_{10010100} = 105\,000 \text{ NOK} \quad (184)$$

Bestillingsperioder:

Vi har dermed funnet bestillingsperioder: (Y_t -variablene):

$$Y_1 = 1 \quad (185)$$

$$Y_2 = 0 \quad (186)$$

$$Y_3 = 0 \quad (187)$$

$$Y_4 = 1 \quad (188)$$

$$Y_5 = 0 \quad (189)$$

$$Y_6 = 1 \quad (190)$$

$$Y_7 = 0 \quad (191)$$

$$Y_8 = 0 \quad (192)$$

Produksjonsmengder:

Vi finner X_t -variablene ved å bruke teoremet om "Dominante produksjonsplaner" - kun hele etterspørselsbehov.

$$X_1 = D_1 + D_2 + D_3 = 3\,000 + 2\,000 + 2\,800 = 7\,800 \quad (193)$$

$$X_2 = 0 \quad (194)$$

$$X_3 = 0 \quad (195)$$

$$X_4 = D_4 + D_5 = 3\,400 + 3\,000 = 6\,400 \quad (196)$$

$$X_5 = 0 \quad (197)$$

$$X_6 = D_6 + D_7 + D_8 = 5\,000 + 4\,500 + 3\,700 = 13\,200 \quad (198)$$

$$X_7 = 0 \quad (199)$$

$$X_8 = 0 \quad (200)$$

Produksjonsmengder:

Fra X_t -variablene leser vi enkelt av lagervariablene:

$$I_1 = D_2 + D_3 = 2\,000 + 2\,800 = 4\,800 \quad (201)$$

$$I_2 = D_3 = 2\,800 \quad (202)$$

$$I_3 = 0 \quad (203)$$

$$I_4 = D_5 = 3\,000 \quad (204)$$

$$I_5 = 0 \quad (205)$$

$$I_6 = D_7 + D_8 = 4\,500 + 3\,700 = 8\,200 \quad (206)$$

$$I_7 = D_8 = 3\,700 \quad (207)$$

- g) Hvis vi får en kansellering på 1000 iPhoner i uke 5
så må vi beregne C_5^* på nytt med etterspørsel på 2000 iPhoner istedet for 3000 iPhoner.

Periode 5: (subproblem de 5 første periodene)

$$\underline{C}_5^* = \min \left[C_{xx100} , C_{xxx10} , C_{xxxx1} \right] \quad (208)$$

$$= \min \left[(siste\ bestilling\ i\ 3.\ perioden) , (siste\ bestilling\ i\ 4.\ perioden) , \right. \\ \left. (siste\ bestilling\ i\ 5.\ perioden) \right] \quad (209)$$

$$= \min \left[(C_{xx10} + 2 \cdot H \cdot D_5) , (C_{xxx1} + H \cdot D_5) , (C_4^* + S) \right] \quad (210)$$

$$= \min \left[(50\,800 + 2 \cdot 2 \cdot 2000) , (55\,200 + 2 \cdot 2000) , (50\,800 + 20\,000) \right] \quad (211)$$

$$= \min \left[58\,800 , 59\,200 , 70\,800 \right] \quad (212)$$

$$= 58\,800 \text{ NOK} \quad (213)$$

Siden vi nå ikke kan bruke horisontteoremet må vi også beregne C_6^* på nytt, hvor vi nå inkluderer uke 3. Legg merke til at i oppgave 4e så var det optimalt med siste bestilling i 4. periode.

Periode 6: (subproblem de 6 første periodene)

$$\underline{C}_6^* = \min \left[C_{xx1000} , C_{xxx100} , C_{xxxx10} , C_{xxxxx1} \right] \quad (214)$$

$$= \min \left[(siste\ bestilling\ i\ 3.\ perioden) , (siste\ bestilling\ i\ 4.\ perioden) , \right. \\ \left. (siste\ bestilling\ i\ 5.\ perioden), (siste\ bestilling\ i\ 6.\ perioden) \right] \quad (215)$$

$$= \min \left[(C_{xx100} + 3 \cdot H \cdot D_6) , (C_{xxx10} + 2 \cdot H \cdot D_6) , (C_{xxxx1}^* + H \cdot D_6) , (C_5^* + S) \right] \quad (216)$$

$$= \min \left[(58\ 800 + 3 \cdot 2 \cdot 5000) , (59\ 200 + 2 \cdot 2 \cdot 5000) , (70\ 800 + 2 \cdot 5000) , (58\ 800 + 20\ 000) \right]$$

$$= \min \left[88\ 800 , 79\ 200 , 80\ 800 , \underline{78\ 800} \right] \quad (217)$$

$$= \underline{78\ 800\ NOK} \quad (218)$$

Horisontteoremet kutter nå både uke 3, 4 og 5.

Vi fortsetter til delproblem 7.

Periode 7: (subproblem de 7 første periodene)

$$\underline{C_7^*} = \min \left[C_{xxxxx10}, C_{xxxxx1} \right] \quad (219)$$

$$= \min \left[(\textit{siste bestilling i 6. periode}), (\textit{siste bestilling i 7. periode}) \right] \quad (220)$$

$$= \min \left[(C_{xxxxx1} + H \cdot D_7), (C_6^* + S) \right] \quad (221)$$

$$= \min \left[(78\,800 + 2 \cdot 4500), (78\,800 + 20\,000) \right] \quad (222)$$

$$= \min \left[\underline{87\,800}, 98\,800 \right] \quad (223)$$

$$= \underline{87\,800 \text{ NOK}} \quad (224)$$

Horisontteoremet kutter ingen uker her, så vi fortsetter til delproblem 8.

Periode 8: (det fulle problemet)

$$\underline{C}_8^* = \min \left[C_{xxxxx100}, C_{xxxxx10}, C_{xxxxxx1} \right] \quad (225)$$

$$= \min \left[(\text{siste bestilling i 6. periode}), (\text{siste bestilling i 7. periode}), (\text{siste bestilling i 8. periode}) \right] \quad (226)$$

$$= \min \left[(C_{xxxxx10} + 2 \cdot H \cdot D_8), (C_{xxxxxx1} + H \cdot D_8), (C_7^* + S) \right] \quad (227)$$

$$= \min \left[(87\,800 + 2 \cdot 2 \cdot 3700), (98\,800 + 2 \cdot 3700), (87\,800 + 20\,000) \right] \quad (228)$$

$$= \min \left[\underline{102\,600}, 106\,200, 107\,800 \right] \quad (229)$$

$$= \underline{102\,600 \text{ NOK}} \quad (230)$$

Vi har dermed funnet den optimale kostnaden på 102 600 kroner.

Vi må nå til slutt finne selve bestillingsplanen.

Dette gjør vi ved å starte bakerst og gå fremover fra subproblem til subproblem og lese av hvor siste bestilling inntreffer.

- $C_{xxxxx100}$, siden siste bestilling skjer i uke 6. Vi hopper dermed til delproblem 5.
- $C_{xx100100}$, siden siste bestilling skjer i uke 3 for delproblem 5. Vi hopper til delproblem 2.
- $C_{10100100}$, siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 2.

Vi har dermed optimal løsning:

$$\underline{\underline{C^* = C_{10100100} = 102\,600 \text{ NOK}}} \quad (231)$$

- h) Den nye føringen fra Apple sier at vi ikke kan bestille to uker på rad. Siden variablene Y_t , for $t = 1, \dots, 8$ representerer bestillingene sier føringen at vi ikke kan ha to påfølgende Y-variabler lik 1:

$$\text{Hvis } Y_t = 1 \text{ så må } Y_{t+1} = 0 \quad (232)$$

for alle $t = 1, \dots, 7$.

Denne føringen kan uttrykkes matematisk ved:

$$Y_t + Y_{t+1} \leq 1 \quad (233)$$

for alle $t = 1, \dots, 7$.

- i) Løsningen fra oppgave 4e-4f er gitt ved $C_{10010100}$. Vi ser at løsningen *ikke* bestiller to uker på rad (to 1ere etter hverandre). Løsningen er derfor fremdeles optimal.
- j) Teoremet om dominante produksjonsplaner er fremdeles oppfylt siden vi fremdeles kan flytte etterspørsel i perioder med produksjon uten at noen av føringene brytes.

Horisontteoremet er derimot *ikke* oppfylt siden vi nå må ta høyde for at to bestillinger ikke kan komme etter hverandre.

Årsaken kommer av at vi ikke lenger kan splitte et problem i to subproblemer hvor det er optimalt å ha produksjon, noe som igjen kommer av at de to delproblemene er koblet gjennom den nye føringen.

Det er derimot naturlig å forvente at en variant av horisontteoremet er oppfylt som betinger på hvor det er produksjon.

