

LØSNING: **TEST**eksamen mai 2019

“SCM200 Lager- og Produksjonsstyring”, vår 2019

Versjon 02

Oppgave 1: (prognostisering, **25 %**)

- a) Eksponentiell glatting, $ES(\theta)$, er en metode som er hensiktsemssig å bruke for å lage prognoser for data som følger et tilfeldig mønster.

Som vi ser fra figur 4 i oppgaveteksten, de dataene X_t følger et tilfeldig mønster. ¹

Dermed er $ES(\theta = 0.7)$ er god prognosemetode i denne sammenheng.

- b) Bruker $ES(\theta)$, eksponentiell glatting, for å finne de historiske prognosene F_t tilhørende dataene X_t :

Siden vi har oppgitt $F_9 = 6.33$ og $X_9 = 8$, kan vi regne ut for F_{10} :

$$\underline{F_{10}} = \theta F_9 + (1 - \theta)X_9 \quad (1)$$

$$= 0.7 \cdot 6.33 + (1 - 0.7) \cdot 8 \quad (2)$$

$$= \underline{6.83} \quad (3)$$

¹Skretting har også valgt en relativt høy glattingsparameter ($\theta = 0.7$). En høy glattingsparameter gjør at store endringer i salgene glattes ut.

Prognosen F_{11} :

$$\underline{\underline{F_{11}}} = \theta F_{10} + (1 - \theta)X_{10} \quad (4)$$

$$= 0.7 \cdot 6.83 + (1 - 0.7) \cdot 9 \quad (5)$$

$$= \underline{\underline{7.48}} \quad (6)$$

Prognosen F_{12} :

$$\underline{\underline{F_{12}}} = \theta F_{11} + (1 - \theta)X_{11} \quad (7)$$

$$= 0.7 \cdot 7.48 + (1 - 0.7) \cdot 5 \quad (8)$$

$$= \underline{\underline{6.73}} \quad (9)$$

- c) Gjennomsnittlig absolutt avvik, MAD , er definert ved:

$$MAD = \frac{1}{T - s + 1} \sum_{t=s}^T |E_t| \quad (10)$$

hvor

$$E_t = X_t - F_t \quad (11)$$

I vårt tilfelle er $T = 12$ og $s = 2$.

Med eksponensiell glatting $ES(\theta = 0.7)$ for prognosene $F_2, \dots, F_{12}$ fra oppgaveteksten samt lign.(3), (6) og (9) så får vi:

$$\underline{\underline{MAD}} = \frac{1}{11} \sum_{t=2}^{12} |E_t| \quad (12)$$

$$= \frac{1}{11} (|E_2| + |E_3| + |E_4| + |E_5| + \dots + |E_{12}|) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{11} (|2| + |-1.6| + |2.88| + |-0.98| \\ &\quad + |3.31| + |-0.68| + |-0.48| + |1.67| \\ &\quad + |9 - 6.83| + |5 - 7.48| + |7 - 6.73|) \end{aligned} \quad (14)$$

$$= \underline{\underline{1.68}} \quad (15)$$

■

Oppgave 2: (aggregert planlegging, 25 %)

a) Indekseringer:

- **familiene** indekseres ved $i = 1, \dots, 7$
- produksjonslinjene indekseres ved $j = 1, 2$
- **periodene** indekseres ved $t = 1, \dots, 3$

Definerer data:² ³

$$D_{it} = \begin{array}{l} \text{etterspørsel (i antall 1000 tonn) av familie } i \text{ i periode } t, \\ \text{hvor } i = 1, \dots, 7 \text{ og } t = 1, \dots, 3 \end{array} \quad (16)$$

$$R_{ij} = \begin{array}{l} \text{bearbeidingstid (timer per 1000 tonn) for familie } i \text{ og linje } j, \\ \text{hvor } i = 1, \dots, 7 \text{ og } j = 1, 2 \end{array} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \text{maksimalt antall timer tilgjengelig per linje per periode} \\ &= 560 \text{ timer per periode per linje} \\ &\text{(samme verdi for begge linjer og alle perioder)} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{O} &= \text{maksimalt antall timer overtid tilgjengelig per periode per linje} \\ &= 240 \text{ timer per periode per linje} \\ &\text{(samme verdi for begge linjer og alle perioder)} \end{aligned} \quad (19)$$

$$C_j = \begin{array}{l} \text{kostnad per time overtid for linje } j \\ \text{hvor } j = 1, 2 \end{array} \quad (20)$$

²Husk at data er størrelsen vi ikke kan påvirke.

³Vi har ikke setupkostander her fordi.....

$$\begin{aligned}
H &= \text{lagerkostnad per 1000 tonn per periode per familie} \\
&= 200\,000 \text{ NOK per 1000 tonn per periode per familie}
\end{aligned}
\tag{21}$$

$$\begin{aligned}
I_{i0} &= \text{startlager } (t = 0) \text{ for familie } i, \\
&\text{hvor } i = 1, \dots, 7
\end{aligned}
\tag{22}$$

$$\begin{aligned}
I_{i3} &= \text{sluttlager } (t = 3) \text{ for familie } i, \\
&\text{hvor } i = 1, \dots, 7
\end{aligned}
\tag{23}$$

b) Tre typer variabler:

1) Variabel 1:

Antall 1000 tonn produsert av hver familie per periode:

$$\underline{\underline{X_{ijt} = \text{antall 1000 tonn produsert av familie } i \text{ for linje } j \text{ i periode } t}}} \quad (24)$$

hvor $i = 1, \dots, 7$, $j = 1, 2$ og $t = 1, \dots, 3$.

2) Variabel 2:

Antall timer overtid per periode: (overtid skiller ikke på familier i)

$$\underline{\underline{O_{jt} = \text{antall timer overtid for linje } j \text{ i periode } t}}} \quad (25)$$

hvor $j = 1, 2$ og $t = 1, \dots, 3$.

3) Variabel 3:

Antall 1000 tonn overlagret fra en periode til neste av hver familie:
(overtid skiller ikke på produksjonslinjer j)

$$\underline{\underline{I_{it} = \text{antall 1000 tonn overlagret fra periode } t \text{ til } t + 1 \text{ av familie } i}}} \quad (26)$$

hvor $i = 1, \dots, 7$ og $t = 1, \dots, 2$.⁴

⁴Legg merke til at $t = 1, \dots, 2$, ikke til 3. Ser du hvorfor?

- c) Målfunksjonen C er gitt ved totale lager- og overtidskostnader hvor vi her har to produksjonslinjer:

$$C = \overbrace{H \sum_{\substack{\textcolor{red}{7} \\ \textcolor{red}{i}=1}}^{\text{lagerkostnad}} \sum_{\substack{\textcolor{blue}{2} \\ \textcolor{blue}{t}=1}} I_{\textcolor{red}{i}\textcolor{blue}{t}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{\textcolor{blue}{2}} \sum_{\substack{\textcolor{blue}{3} \\ \textcolor{blue}{t}=1}} C_j O_{j\textcolor{blue}{t}}}^{\text{overtidskostnad}} \quad (27)$$

d) Tre føringer:

1) Føring 1: ⁵

Lagerbalansen må være oppfylt:

$$\underline{\underline{I_{it-1} + \sum_{j=1}^2 X_{ijt} - D_{it} = I_{it}}} \quad (28)$$

hvor $i = 1, \dots, 7$ og $t = 1, \dots, 3$.

2) Føring 2:

Maksimal produksjonskapasitet totalt for periode (i antall timer):

$$\underline{\underline{\sum_{i=1}^7 R_{ij} X_{ijt} \leq \bar{R} + \bar{O}}} \quad (29)$$

hvor $j = 1, 2$ og $t = 1, \dots, 3$.

3) Føring 3:

Maksimal overtidskapasitet for hver linje og hver periode (i antall timer):

$$\underline{\underline{O_{jt} \leq \bar{O}}} \quad (30)$$

hvor $j = 1, 2$ og $t = 1, \dots, 3$.

■

⁵Vårt problem dreier seg om lager over flere perioder. Derfor må det være en lagerbalanseligning inne i bildet. I testeksamen fra 2017, derimot, var det kun én periode. Da behøves det ingen balanseligning.

Oppgave 3: (EOQ, 25 %)

a) Optimal ordrestørrelse X^* via EOQ-formelen:

$$\underline{X^*} = \sqrt{\frac{2SD}{H}} \quad (31)$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 2\,000 \cdot 600}{150}} \quad (32)$$

$$= \underline{126.49 \text{ tonn per seriestørrelse}} \quad (33)$$

Optimal seriestørrelse er $X^* = 126.49$ tonn fisk per seriestørrelse.

Optimale lager- og omstillingskostnader per år er gitt ved: ⁶

$$\underline{C^*} = \frac{SD}{X^*} + \frac{HX^*}{2} \quad (34)$$

$$= HX^* \quad (35)$$

$$= 150 \cdot 126.49 \quad (36)$$

$$= \underline{18\,974 \text{ NOK per år}} \quad (37)$$

Optimale lager- og omstillingskostnader er dermed $C^* = 18\,974$ NOK per år.

⁶Overgangen mellom lign.(34) og lign.(35) er kun korrekt for optimal bestillingsmengde X^* . Dette har vi gått gjennom i forelesingene og man behøver ikke å vise alle detaljene her.

b) Den optimale omløpstiden O^* er gitt ved:

$$\underline{O^*} = \frac{X^*}{D} \quad (38)$$

$$= \frac{126.49}{600} \text{ år} \quad (39)$$

$$= \underline{0.2108 \text{ år}} \quad (40)$$

Optimal omløpstid er dermed $O^* = 0.2108$ år, dvs $O^* = 0.2108 \cdot 52 = 11.0$ uker.

c) Sikkerhetslageret SS med 99 % servicegrad:

$$\underline{SS} = Z_{99} \sqrt{L} \sigma \quad (41)$$

$$= 2.33 \cdot \sqrt{\frac{2}{52}} \cdot 120 \text{ tonn} \quad (42)$$

$$= \underline{54.8 \text{ tonn}} \quad (43)$$

Et sikkerhetslager på $SS = 54.8 \text{ tonn fisk}$ gir servicegrad på 99 %.

Den årlige kostnaden for dette lageret blir:

$$\underline{\underline{C_{SS}}} = SS \cdot H \quad (44)$$

$$= 54.8 \cdot 150 \text{ NOK per år} \quad (45)$$

$$= \underline{\underline{8\,220 \text{ NOK per år}}} \quad (46)$$

d) Bestillingspunktet R_{99} :

$$\underline{R_{99}} = DL + SS \quad (47)$$

$$= \left(600 \cdot \frac{2}{52} + 54.8 \right) \text{ tonn} \quad (48)$$

$$= \underline{77.9 \text{ tonn}} \quad (49)$$

Når lageret har nådd 77.9 tonn fisk så må man legge inn en ny bestilling.

e) Økonomiske konsekvenser:

1) Reduserte kostnader: (**gevinst**)

a) Dersom servicegraden reduseres, si $Z' < Z$, så reduseres også sikkerhetslageret med $\Delta SS = (Z - Z')\sqrt{L}\sigma$.
Tilhørende reduserte lagerkostnader blir da $\Delta SS \cdot H$.

b) Med redusert servicegrad kan man også regne med redusert etterspørsel $D' < D$ pga. misfornøyde kunder.
Redusert D' vil gi redusert optimal ordrestrørrelse $X^{*'} = \sqrt{2D'S/H}$.
Tilhørende reduserte lagerkostnader blir da $\Delta C^* = (X^* - X^{*'}) \cdot H$.

2) Tapt inntekt: (**tap**)

Men redusert etterspørsel D gir også tapte inntekter pga. tapt salg. La

$$C_{tap} = \text{kostnaden for å miste en enhet etterspørsel} \quad (50)$$

Tilhørende tapt inntekt er da $\Delta I = (D - D') \cdot C_{tap}$.

Konklusjon:

Effektene ovenfor trekker i hver sin retning. Om det er økonomisk lønnsomt å redusere servicegraden må det regnes på. ⁷

■

⁷Utregninger er ikke en del av denne oppgaven. Her skal vi kun kvantitativt diskutere de økonomiske konsekvensene.

Oppgave 4: (-Whitin, 25 %)

a) Wagner-Whitins algoritme:

P₁: Siden $D_1 = 60 > I_0 = 10$ så må vi ha produksjon i periode 1:

$$C_1^* = S = 3\,000 \quad (51)$$

P₂:

$$C_2^* = \min [C_{10}, C_{x1}] \quad (52)$$

$$= \min [C_1 + HD_2, C_1^* + S] \quad (53)$$

$$= \min [3\,000 + 30 \cdot 90, 3\,000 + 3\,000] \quad (54)$$

$$= \min [\underline{5\,700}, 6\,000] \quad (55)$$

$$= 5\,700 \quad (56)$$

Horisontteoremet kutter ingen perioder.

P_3 :

$$C_3^* = \min [C_{10\mathbf{0}} , C_{x1\mathbf{0}} , C_{xx\mathbf{1}}] \quad (57)$$

$$= \min [C_{10} + \mathbf{2HD_3} , C_{x1} + \mathbf{HD_3} , C_2^* + \mathbf{S}] \quad (58)$$

$$= \min [5\,700 + \mathbf{2 \cdot 30 \cdot 40} , 6\,000 + \mathbf{30 \cdot 40} , 5\,700 + \mathbf{3\,000}] \quad (59)$$

$$= \min [8\,100 , \mathbf{7\,200} , 8\,700] \quad (60)$$

$$= 7\,200 \quad (61)$$

Horisontteoremet kutter periode 1.

P_4 :

$$C_4^* = \min [C_{x10\mathbf{0}} , C_{xx1\mathbf{0}} , C_{xxx\mathbf{1}}] \quad (62)$$

$$= \min [C_{x10} + \mathbf{2H(D_4 + I_4)} , C_{xx1} + \mathbf{H(D_4 + I_4)} , C_3^* + \mathbf{S}] \quad (63)$$

$$= \min [7\,200 + \mathbf{2 \cdot 30 \cdot (10 + 20)} , 8\,700 + \mathbf{20 \cdot (10 + 20)} , 7\,200 + \mathbf{3\,000}] \quad (64)$$

$$= \min [\mathbf{9\,000} , 9\,300 , 10\,200] \quad (65)$$

$$= 9\,000 \quad (66)$$

Minimale lager- og omstillingskostnader er 9 000 NOK.

b) Vi starter bakfra og jobber oss frem til løsningen:

- C_{x100} , siden siste bestilling skjer i uke 2 $\rightarrow$ delproblem 1.
- C_{1100} , siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 1

Bestillingsplanen: (Y_t -variablene)

$$Y_1 = 1 \quad (67)$$

$$Y_2 = 1 \quad (68)$$

$$Y_3 = 0 \quad (69)$$

$$Y_4 = 0 \quad (70)$$

Produksjonsmengder: (X_t -variablene)

Vi finner X_t -variablene ved å bruke teoremet om ”*Dominante produksjonsplaner*”, kun hele etterspørselsbehov.

$$\underline{\underline{X_1}} = D_1 - I_0 = 60 - 10 = \underline{\underline{50}} \quad (71)$$

$$\underline{\underline{X_2}} = D_2 + D_3 + D_4 + I_4 = 90 + 40 + 10 + 20 = \underline{\underline{160}} \quad (72)$$

$$\underline{\underline{X_3}} = \underline{\underline{0}} \quad (73)$$

$$\underline{\underline{X_4}} = \underline{\underline{0}} \quad (74)$$

Lagermengder: (I_t -variablene)

Fra X_t -variablene finner vi optimale lagermengder:

$$\underline{\underline{I_1}} = 0 \quad (75)$$

$$I_2 = D_3 + D_4 + I_4 = 40 + 10 + 20 = \underline{\underline{70}} \quad (76)$$

$$\underline{\underline{I_3}} = D_4 + I_4 = 10 + 20 = \underline{\underline{30}} \quad (77)$$

- c) Dersom man inkluderer produksjonskapasitet i Wagner-Withins modell, vil Wagner-Withins algoritme ikke generelt gi gyldig optimal løsning.

Årsaken er at teoremet om dominante produksjonsplaner som regel gir perioder med stor produksjon, noe som dermed forårsaker at kapasiteten som regel overskrides.

■