

LØSNING: Eksamen 10. mai 2019

“SCM200 Lager- og Produksjonsstyring”, vår 2019

Versjon 03

Oppgave 1: (prognostisering, 25 %)

- a) Eksponentiell glatting, $ES(\theta)$, er en metode som er hensiktsemssig å bruke for å lage prognoser for data som følger et tilfeldig mønster.

Fra Fig.4 i oppgaven ser vi imidlertid at vi har sesongvariasjoner med høye salg i juni.

Skretting har også valgt en relaivt høy glattingsparameter ($\theta = 0.8$). En høy glattingsparameter gjør at store endringer i salgene gattes ut. Dette er ikke en ønsket egenskap ved prognosemetoden siden den da ikke fanger opp effekten av sterke sesongvariasjoner.

Dermed er ikke $ES(\theta = 0.8)$ er god prognosemetode i denne sammenheng.

- b) Som nevnt i oppgave a): Eksponentiell glatting, $ES(\theta)$, er en metode som er hensiktsemssig å bruke for å lage prognoser for data som følger et tilfeldig mønster.

Som nevnt i oppgaveteksten, de transformerte dataene Y_t følger et tilfeldig mønster.

Dermed er $ES(\theta = 0.8)$ er god prognosemetode i denne sammenheng.

- c) Bruker $ES(\theta)$, eksponentiell glatting, for å finne de historiske prognosene G_t tilhørende de transformerte dataene Y_t :

Siden vi har oppgitt $G_9 = 12.01$, $S_9 = 1.3$ og $X_9 = 10$, kan vi regne ut for G_{10} :

$$\underline{\underline{G_{10}}} = \theta G_9 + (1 - \theta) \overbrace{Y_9}^{= S_9 X_9} \quad (1)$$

$$= 0.8 \cdot 12.01 + (1 - 0.8) \cdot 1.3 \cdot 10 \quad (2)$$

$$= \underline{\underline{12.21}} \quad (3)$$

Prognosen G_{11} :

$$\underline{\underline{G_{11}}} = \theta G_{10} + (1 - \theta) \overbrace{Y_{10}}^{= S_{10} X_{10}} \quad (4)$$

$$= 0.8 \cdot 11.61 + (1 - 0.8) \cdot 1.3 \cdot 12 \quad (5)$$

$$= \underline{\underline{12.89}} \quad (6)$$

Prognosen G_{12} :

$$\underline{\underline{G_{12}}} = \theta G_{11} + (1 - \theta) \overbrace{Y_{11}}^{= S_{11} X_{11}} \quad (7)$$

$$= 0.8 \cdot 11.69 + (1 - 0.8) \cdot 1.4 \cdot 11 \quad (8)$$

$$= \underline{\underline{13.39}} \quad (9)$$

d) Transformasjonen

$$Y_t = S_t X_t \quad (10)$$

kan løses med hensyn på X_t :

$$X_t = \frac{Y_t}{S_t} \quad (11)$$

hvor

$$X_t = \text{salg (sesongvariasjoner) med tilhørende prognoser } F_t \quad (12)$$

$$Y_t = \text{transformert salg (tilfeldig mønster) med tilhørende prognoser } G_t \quad (13)$$

Sammenhengen mellom prognosene F_t og G_t blir dermed:

$$\boxed{F_t = \frac{G_t}{S_t} \quad (14)}$$

De ikke-transformerte F_t -prognosene blir dermed:

$$\underline{\underline{F_{10}}} = \frac{G_{10}}{S_{10}} = \frac{12.21}{1.3} = \underline{\underline{9.39}} \quad (15)$$

$$\underline{\underline{F_{11}}} = \frac{G_{11}}{S_{11}} = \frac{12.89}{1.4} = \underline{\underline{9.21}} \quad (16)$$

$$\underline{\underline{F_{12}}} = \frac{G_{12}}{S_{12}} = \frac{13.39}{1.5} = \underline{\underline{8.93}} \quad (17)$$

■

Oppgave 2: (aggregert planlegging, 25 %)

a) Antaller timer som trengs:

$$\text{antall timer behov} = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 7x_6 \quad (18)$$

$$= \left(6 \cdot 32 + 4 \cdot 75 + 5 \cdot 72 + 6 \cdot 36 + 5 \cdot 180 + 7 \cdot 25 \right) \text{ timer}$$

$$= \underline{2143 \text{ timer}} \quad (19)$$

Antall timer tilgjengelig:

$$\underline{\text{antall timer tilgjengelig}} = 6 \cdot 280 \text{ timer} = \underline{1680 \text{ timer}} \quad (20)$$

dvs. fabrikken har ikke nok kapasitet til å tilfredsstille etterspørselen.

b) Indekseringer:

- **familiene** indekseres ved $i = 1, \dots, 6$
- **periodene** indekseres ved $t = 1, \dots, 6$

Definerer data: ¹

$$D_{it} = \text{etterspørsel (i antall 1000 tonn) av familie } i \text{ i periode } t, \quad (21)$$

hvor $i = 1, \dots, 6$ og $t = 1, \dots, 6$

$$R_i = \text{bearbeidingstid (timer per 1000 tonn) for familie } i, \quad (22)$$

hvor $i = 1, \dots, 6$

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \text{maksimalt antall timer tilgjengelig per periode} \\ &= 280 \text{ timer per periode} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \bar{O} &= \text{maksimalt antall timer overtid tilgjengelig per periode} \\ &= 120 \text{ timer per periode} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} C &= \text{kostnad per time overtid} \\ &= 5\,000 \text{ NOK per time} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} H &= \text{lagerkostnad per 1000 tonn per periode per familie} \\ &= 100\,000 \text{ NOK per 1000 tonn per periode per familie} \end{aligned} \quad (26)$$

$$I_{i0} = \text{startslager (} t = 0 \text{) for familie } i, \quad (27)$$

hvor $i = 1, \dots, 6$

$$I_{i6} = \text{sluttlager (} t = 6 \text{) for familie } i, \quad (28)$$

hvor $i = 1, \dots, 6$

¹Husk at data er størrelsen vi ikke kan påvirke.

c) Tre typer variabler:

1) Variabel 1:

Antall 1000 tonn produsert av hver familie per periode:

$$X_{it} = \text{antall 1000 tonn produsert av familie } i \text{ i periode } t \quad (29)$$

hvor $i = 1, \dots, 6$ og $t = 1, \dots, 6$.

2) Variabel 2:

Antall timer overtid per periode:

$$O_t = \text{antall timer overtid i periode } t \quad (30)$$

hvor $t = 1, \dots, 6$.

3) Variabel 3:

Antall 1000 tonn overlagret fra en periode til neste av hver familie:

$$I_{it} = \text{antall 1000 tonn overlagret fra periode } t \text{ til } t + 1 \text{ av familie } i \quad (31)$$

hvor $i = 1, \dots, 6$ og $t = 1, \dots, 5$.

- d) Målfunksjonen C er gitt ved totale lager- og overtidskostnader:

$$C_{tot} = \overbrace{H \sum_{i=1}^6 \sum_{t=1}^5 I_{it}}^{\text{lagerkostnad}} + \overbrace{C \sum_{t=1}^6 O_t}^{\text{overtidskostnad}} \quad (32)$$

- e) Tre føringer:

- 1) Føring 1:²

Lagerbalansen må være oppfylt:

$$I_{it-1} + X_{it} - D_{it} = I_{it} \quad (33)$$

hvor $i = 1, \dots, 6$ og $t = 1, \dots, 6$.

- 2) Føring 2:

Maksimal produksjonskapasitet totalt for hvert periode (i antall timer):

$$\sum_{i=1}^6 R_i X_{it} \leq \bar{R} + O_t \quad (34)$$

hvor $t = 1, \dots, 6$.

²Vårt problem dreier seg om lager over flere perioder. Derfor må det være en lagerbalanseligning inne i bildet. I testeksamen fra 2017, derimot, var det kun én periode. Da behøves det ingen balanseligning.

2) Føring 3:

Maksimalt antall overtidstimer per periode (i antall timer):

$$O_t \leq \overline{O} \tag{35}$$

hvor $t = 1, \dots, 6$.

■

Oppgave 3: (EOQ, 25 %)

- a) *EOQ*-formelen er relativt lite følsom for endringer i parametrene. Derfor gir den en god tilnærming til optimal seriestørrelse selv om forutsetningene til formelen kun er tilnærmet oppfylt.

- b) Vi regner ut X^* ved hjelp av EOQ-formelen:

$$\underline{X^*} = \sqrt{\frac{2SD}{H}} \quad (36)$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 5\,000 \cdot 2\,300}{200}} \quad (37)$$

$$= \underline{339.12 \text{ tonn per seriestørrelse}} \quad (38)$$

Optimal seriestørrelse er $X^* = 339.12$ tonn fisk per seriestørrelse.

Optimale lager- og omstillingskostnader per år er gitt ved: ³

$$\underline{C^*} = \frac{SD}{X^*} + \frac{HX^*}{2} \quad (39)$$

$$= HX^* \quad (40)$$

$$= 200 \cdot 339.12 \quad (41)$$

$$= \underline{67\,823 \text{ NOK per år}} \quad (42)$$

Optimale lager- og omstillingskostnader er dermed $C^* = 67\,823$ NOK per år.

³Overgangen mellom lign.(39) og lign.(40) er kun korrekt for optimal bestillingsmengde X^* . Dette har vi gått gjennom i forelesingene og man behøver ikke å vise alle detaljene her.

c) Sikkerhetslageret SS med 99 % servicegrad:

$$\underline{SS} = Z_{99} \sqrt{L} \sigma \quad (43)$$

$$= 2.33 \cdot \sqrt{\frac{3}{52}} \cdot 500 \quad (44)$$

$$= \underline{280 \text{ tonn}} \quad (45)$$

Et sikkerhetslager på $SS = 280 \text{ tonn fisk}$ gir servicegrad på 99 %.

Den årlige kostnader for dette lageret blir:

$$\underline{\underline{C_{SS}}} = SS \cdot H \quad (46)$$

$$= 280 \cdot 200 \text{ NOK per år} \quad (47)$$

$$= \underline{\underline{55\,965 \text{ NOK per år}}} \quad (48)$$

d) Kostnaden C_{tap} er bestemt ut fra:

$$\text{gevinst} = \text{tap} \quad (49)$$

Matematisk gir dette: ⁴

$$\boxed{\Delta C^* + \Delta C_{SS} = \Delta I} \quad (50)$$

hvor

$$\Delta C^* = \text{redusert lagerkostnad pga. redusert antall optimal ordrestørrelse} \quad (51)$$

$$= (X^* - X^{*'}) H = \left(\sqrt{\frac{2DS}{H}} - \sqrt{\frac{2D'S}{H}} \right) H = \sqrt{2SH} (\sqrt{D} - \sqrt{D'}) \quad (52)$$

$$\Delta C_{SS} = \text{redusert lagerkostnad pga. redusert sikkerhetslager} \quad (53)$$

$$= \Delta SS \cdot H = (Z_{99}\sqrt{L}\sigma - Z_{95}\sqrt{L}\sigma) H = (Z_{99} - Z_{95})\sqrt{L}\sigma H \quad (54)$$

$$\Delta I = \text{tapt inntekt} \quad (55)$$

$$= (D - D')C_{tap} \quad (56)$$

Innsatt i lign.(50):

$$\Delta C^* + \Delta C_{SS} = \Delta I \quad (57)$$

$$\sqrt{2SH}(\sqrt{D} - \sqrt{D'}) \cdot H + (Z_{99} - Z_{95})\sqrt{L}\sigma H = (D - D')C_{tap} \quad (58)$$

⁴De matematiske uttrykkene finner du i oppgaveteksten.

Løser mhp. C_{tap} :

$$C_{tap} = \frac{\sqrt{2SH}(\sqrt{D} - \sqrt{D'}) + (Z_{99} - Z_{95})\sqrt{L}\sigma H}{D - D'} \quad (59)$$

Tall:

$$\underline{C_{tap}} = \frac{\sqrt{2SH}(\sqrt{D} - \sqrt{D'}) + (Z_{99} - Z_{95})\sqrt{L}\sigma H}{D - D'} \quad (60)$$

$$= \frac{\sqrt{2 \cdot 5000 \cdot 200}(\sqrt{2300} - \sqrt{2100}) + (2.33 - 1.65)\sqrt{\frac{3}{52}}500 \cdot 200}{2300 - 2100} \quad (61)$$

$$= \underline{97.9 \text{ NOK per tonn}} \quad (62)$$

For situasjonen som beskrevet i oppgaven så er kostnaden ved tapt salg
 $C_{tap} = 97.9$ NOK per tonn.

■

Oppgave 4: (Wagner-Whitin, 20 %)

a) Wagner-Withins algoritme:

P₁: Siden $D_1 = 150 > I_6 = 30$ så må vi ha produksjon i periode 1:

$$C_1^* = S = 4000 \quad (63)$$

P₂:

$$C_2^* = \min \left[C_{10}, C_{x1} \right] \quad (64)$$

$$= \min \left[C_1 + HD_2, C_1^* + S \right] \quad (65)$$

$$= \min \left[4000 + 20 \cdot 120, 4000 + 4000 \right] \quad (66)$$

$$= \min \left[\underline{6400}, 8000 \right] \quad (67)$$

$$= 6400 \quad (68)$$

Horisontteoremet kutter ingen perioder.

P_3 :

$$C_3^* = \min \left[C_{10\textcolor{red}{0}} , C_{x1\textcolor{red}{0}} , C_{xx\textcolor{red}{1}} \right] \quad (69)$$

$$= \min \left[C_{10} + \textcolor{red}{2}HD_3 , C_{x1} + \textcolor{red}{H}D_3 , C_2^* + \textcolor{red}{S} \right] \quad (70)$$

$$= \min \left[6\,400 + \textcolor{red}{2} \cdot \textcolor{red}{20} \cdot \textcolor{red}{180} , 8\,000 + \textcolor{red}{20} \cdot \textcolor{red}{180} , 6\,400 + \textcolor{red}{4\,000} \right] \quad (71)$$

$$= \min \left[13\,600 , 11\,600 , \underline{10\,400} \right] \quad (72)$$

$$= 10\,400 \quad (73)$$

Horisontteoremet kutter periode 1 og 2.

P_4 :

$$C_4^* = \min \left[C_{xx1\textcolor{red}{0}} , C_{xxx\textcolor{red}{1}} \right] \quad (74)$$

$$= \min \left[C_{xx1} + \textcolor{red}{H}D_4 , C_3^* + \textcolor{red}{S} \right] \quad (75)$$

$$= \min \left[10\,400 + \textcolor{red}{20} \cdot \textcolor{red}{110} , 10\,400 + \textcolor{red}{4\,000} \right] \quad (76)$$

$$= \min \left[\underline{12\,600} , 14\,400 \right] \quad (77)$$

$$= 12\,600 \quad (78)$$

Horisontteoremet kutter ingen nye perioder.

P_5 :

$$C_5^* = \min \left[C_{xx10\mathbf{0}} , C_{xxx1\mathbf{0}} , C_{xxxx\mathbf{1}} \right] \quad (79)$$

$$= \min \left[C_{xx10} + \mathbf{2HD_5} , C_{xxx1} + \mathbf{HD_5} , C_4^* + \mathbf{S} \right] \quad (80)$$

$$= \min \left[12\,600 + \mathbf{2 \cdot 20 \cdot 140} , 14\,400 + \mathbf{20 \cdot 140} , 12\,600 + \mathbf{4\,000} \right] \quad (81)$$

$$= \min \left[18\,200 , 17\,200 , \underline{16\,600} \right] \quad (82)$$

$$= 16\,600 \quad (83)$$

Horisontteoremet kutter periode 3 og 4.

P_6 :

$$C_6^* = \min \left[C_{xxxx1\mathbf{0}} , C_{xxxx\mathbf{1}} \right] \quad (84)$$

$$= \min \left[C_{xxxx1} + \mathbf{H(D_6 + I_6)} , C_5^* + \mathbf{S} \right] \quad (85)$$

$$= \min \left[16\,600 + \mathbf{20 \cdot (100 + 30)} , 16\,600 + \mathbf{4\,000} \right] \quad (86)$$

$$= \min \left[\underline{19\,200} , 20\,600 \right] \quad (87)$$

$$= 19\,200 \quad (88)$$

Minimale lager- og omstillingskostnader er 19 200 NOK.

b) Vi starter bakfra og jobber oss frem til løsningen:

- C_{xxxx10} , siden siste bestilling skjer i uke 5 for delproblem 6 $\rightarrow$ delproblem 4
- C_{xx1010} , siden siste bestilling skjer i uke 3 for delproblem 4 $\rightarrow$ delproblem 2
- C_{101010} , siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 2.

Bestillingsplanen: (Y_t -variablene)

$$Y_1 = 1 \quad (89)$$

$$Y_2 = 0 \quad (90)$$

$$Y_3 = 1 \quad (91)$$

$$Y_4 = 0 \quad (92)$$

$$Y_5 = 1 \quad (93)$$

$$Y_6 = 0 \quad (94)$$

Produksjonsmengder: (X_t -variablene)

Vi finner X_t -variablene ved å bruke teoremet om ”*Dominante produksjonsplaner*”, kun hele etterspørselsbehov.

$$\underline{\underline{X_1}} = D_1 + D_2 - I_0 = 150 + 120 - 100 = \underline{\underline{170}} \quad (95)$$

$$\underline{\underline{X_2}} = \underline{\underline{0}} \quad (96)$$

$$\underline{\underline{X_3}} = D_3 + D_4 = 180 + 110 = \underline{\underline{290}} \quad (97)$$

$$X_4 = 0 \quad (98)$$

$$\underline{\underline{X_5}} = D_5 + D_6 + I_6 = 140 + 100 + 30 = \underline{\underline{270}} \quad (99)$$

$$X_6 = 0 \quad (100)$$

Lagermengder: (I_t -variablene)

Fra X_t -variablene finner vi optimale lagermengder:

$$\underline{\underline{I_1}} = D_2 = \underline{\underline{120}} \quad (101)$$

$$I_2 = 0 \quad (102)$$

$$\underline{\underline{I_3}} = D_4 = \underline{\underline{110}} \quad (103)$$

$$I_4 = 0 \quad (104)$$

$$\underline{\underline{I_5}} = D_6 + I_6 = 100 + 30 = \underline{\underline{130}} \quad (105)$$

- c) Wagner- Withins modell er en modell hvor antall kombinasjoner vokser som 2^{NT} , hvor N er antall produkter og T er antall perioder. Standard programvare vil dermed ikke være i stand til å løse mer realistiske case siden det er så enormt mange kombinasjoner som skal regnes ut.

Wagner-Withins algoritme løser derimot problemet mye mer effektivt, siden den kutter svært mange kombinasjoner som den ikke trenger å beregne. Algoritmen er derfor mer hensiktsmessig å bruke enn standard programvare.

