

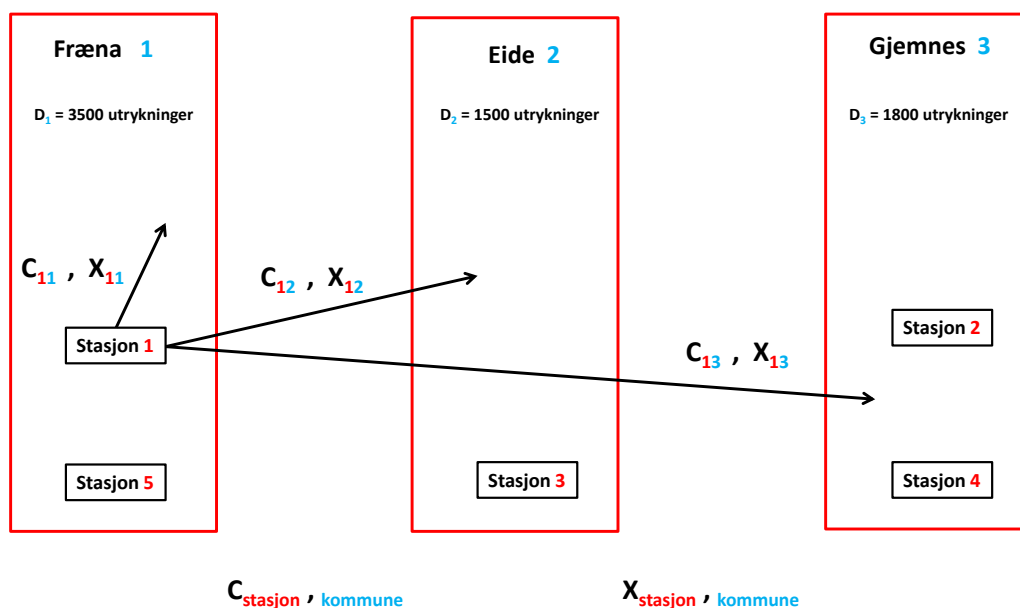
Løsning: Oppgavesett nr.3

“SCM200 Lager -og Produksjonsstyring”, vår 2019

Oppgave 1: (lokalisering og allokering av ambulansestasjoner)

- a) Legg merke til hvor stasjonene ligger. Dette er ikke oppgitt i oppgaven, men ved å se på **billigste kjørerute**, kan vi finne hvor **stasjonene ligger**.

De svaret pilene representerer de tre kjørerutene stasjon 1 har.
 Alle de andre stasjonene har tilsvarende tre ruter, totalt er det 15 ruter.



Figur 1: Figur som beskriver situasjonen.

- b) Problemet er et **diskret lokaliseringsproblem** fordi vi skal velge **hvilke stasjoner vi skal benytte**.
Spesifikt så har vi to stasjoner i Fræna, en i Eide og to i Gjemnes.
- c) Problemet er et **allokeringsproblem** fordi vi skal bestemme **hvilke kommuner en gitt stasjon skal tjene**.
Hver stasjon *kan* i prinsippet tjene alle tre kommunene.

d) Investeringskostander på indeksform: (data)

$$I_i = \text{investeringskostnad for ambulansstasjon } i \quad (1)$$

hvor $\underbrace{i = 1, 2, 3, 4, 5}_{\text{stasjon}}$, altså på formen:

$$I_{\text{stasjon}} \quad (2)$$

Skriver ut lign.(1) eksplisitt:

I_1	=	600 000	investeringskostnad for stasjon 1	(3)
I_2	=	400 000	2	(4)
I_3	=	600 000	3	(5)
I_4	=	300 000	4	(6)
I_5	=	700 000	5	(7)

Antall uttrykninger på indeksform: (data)

$$D_j = \text{antall uttrykninger for kommune } j \quad (8)$$

hvor $\underbrace{j = 1, 2, 3}_{\text{kommune}}$, altså på formen:

$$D_{\text{kommune}} \quad (9)$$

Skriver ut lign.(8) eksplisitt:

$$D_1 = 3500 \quad \text{antall uttrykninger for kommune } 1, \text{ dvs. Fræna} \quad (10)$$

$$D_2 = 1500 \quad 2, \text{ dvs. Eide} \quad (11)$$

$$D_3 = 1800 \quad 3, \text{ dvs. Gjemnes} \quad (12)$$

Utrykningskostnader på indeksform: (data)

$$C_{ij} = \text{utrykningskostnader fra stasjon } i \text{ til kommune } j \quad (13)$$

hvor $\underbrace{i = 1, 2, 3, 4, 5}_{\text{stasjon}}$ og $\underbrace{j = 1, 2, 3}_{\text{kommune}}$, altså på formen:

$$C_{\text{stasjon}, \text{kommune}} \quad (14)$$

Skriver ut lign.(13) eksplisitt:

$$C_{11} = 100 \quad \text{utrykningskostnader fra stasjon } 1 \text{ til kommune } 1, \text{ dvs. Fræna} \quad (15)$$

$$C_{21} = 280 \quad \text{stasjon } 2 \quad (16)$$

$$C_{31} = 250 \quad \text{stasjon } 3 \quad (17)$$

$$C_{41} = 310 \quad \text{stasjon } 4 \quad (18)$$

$$C_{51} = 80 \quad \text{stasjon } 5 \quad (19)$$

og

$$C_{12} = 200 \quad \text{utrykningskostnader fra stasjon } 1 \text{ til kommune } 2, \text{ dvs. Eide} \quad (20)$$

$$C_{22} = 250 \quad \text{stasjon } 2 \quad (21)$$

$$C_{32} = 100 \quad \text{stasjon } 3 \quad (22)$$

$$C_{42} = 260 \quad \text{stasjon } 4 \quad (23)$$

$$C_{52} = 240 \quad \text{stasjon } 5 \quad (24)$$

samt

$$C_{13} = 300 \quad \text{utrykningskostnader fra stasjon } 1 \text{ til kommune } 3, \text{ dvs. Gjemnes} \quad (25)$$

$$C_{23} = 100 \quad \text{stasjon } 2 \quad (26)$$

$$C_{33} = 240 \quad \text{stasjon } 3 \quad (27)$$

$$C_{43} = 80 \quad \text{stasjon } 4 \quad (28)$$

$$C_{53} = 320 \quad \text{stasjon } 5 \quad (29)$$

e) Ambulansestasjon, ja eller nei, på indeksform: (variabler)

$$Y_i = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bruker stasjon } i \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases} \quad (30)$$

hvor $\underbrace{i = 1, 2, 3, 4, 5}_{\text{stasjon}}$, altså på formen:

$$Y_{\text{stasjon}} \quad (31)$$

Skriver ut lign.(30) eksplisitt:

$$Y_1 = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bruker stasjon } 1 \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases} \quad (32)$$

$$Y_2 = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bruker stasjon } 2 \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases} \quad (33)$$

$$Y_3 = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bruker stasjon } 3 \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases} \quad (34)$$

$$Y_4 = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bruker stasjon } 4 \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases} \quad (35)$$

$$Y_5 = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bruker stasjon } 5 \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases} \quad (36)$$

Antall utrykningskostnader på indeksform: (variabler)

$$X_{ij} = \text{antall utrykninger fra stasjon } i \text{ til kommune } j \quad (37)$$

hvor $\underbrace{i = 1, 2, 3, 4, 5}_{\text{stasjon}}$ og $\underbrace{j = 1, 2, 3}_{\text{kommune}}$, altså på formen:

$$X_{\text{stasjon}, \text{kommune}} \quad (38)$$

Skriver ut lign.(37) eksplisitt:

$$X_{11} = \text{antall utrykninger fra stasjon } 1 \text{ til kommune } 1, \text{ dvs. Fræna} \quad (39)$$

$$X_{21} = \text{stasjon } 2 \quad (40)$$

$$X_{31} = \text{stasjon } 3 \quad (41)$$

$$X_{41} = \text{stasjon } 4 \quad (42)$$

$$X_{51} = \text{stasjon } 5 \quad (43)$$

og

$$X_{12} = \text{antall utrykninger fra stasjon } 1 \text{ til kommune } 2, \text{ dvs. Eide} \quad (44)$$

$$X_{22} = \text{stasjon } 2 \quad (45)$$

$$X_{32} = \text{stasjon } 3 \quad (46)$$

$$X_{42} = \text{stasjon } 4 \quad (47)$$

$$X_{52} = \text{stasjon } 5 \quad (48)$$

samt

$$X_{13} = \text{antall utrykninger fra stasjon } 1 \text{ til kommune } 3, \text{ dvs. Gjemnes} \quad (49)$$

$$X_{23} = \text{stasjon } 2 \quad (50)$$

$$X_{33} = \text{stasjon } 3 \quad (51)$$

$$X_{43} = \text{stasjon } 4 \quad (52)$$

$$X_{53} = \text{stasjon } 5 \quad (53)$$

f) Vi har to typer kostnader:

- investeringskostnader
- transportkostnader

Investeringskostnadene er engangskostnader som påløper dersom vi bestemmer oss for å bruke en stasjon eller ikke (Y -variablene).

Transportkostnadene er gitt for hver rute, og fås ved å multiplisere hver rute med antall turer (X -variablene).

Målfunksjonen, altså kostnadsfunksjonen, på indeksform:

$$C = \sum_{i=1}^5 I_i Y_i + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 C_{ij} X_{ij} \quad (54)$$

hvor $\underbrace{i = 1, 2, 3, 4, 5}_{\text{stasjon}}$ og $\underbrace{j = 1, 2, 3}_{\text{kommune}}$, eller utskrevet eksplisitt:

$$C = I_1 Y_1 + I_2 Y_2 + I_3 Y_3 + I_4 Y_4 + I_5 Y_5 \quad (55)$$

$$+ C_{11} X_{11} + C_{21} X_{21} + C_{33} X_{31} + C_{41} X_{41} + C_{51} X_{51} \quad (\text{tot. kost. Fræna}) \quad (56)$$

$$+ C_{12} X_{12} + C_{22} X_{22} + C_{32} X_{32} + C_{42} X_{42} + C_{52} X_{52} \quad (\text{tot. kost. Eide}) \quad (57)$$

$$+ C_{13} X_{13} + C_{23} X_{23} + C_{33} X_{33} + C_{43} X_{43} + C_{53} X_{53} \quad (\text{tot. kost. Gjemnes}) \quad (58)$$

g) Generelt har vi tre typer føringer:

- kapasitetsføringer
- policyføringer
- logiske føringer

I denne modellen har vi kun to føringer:

- policyføring - all “etterspørsel” skal oppfylles
- logiske føring - ingen stasjon, heller ingen utrykninger fra den stasjonen

1) Policyføringer på indeksform: (policy - “etterspørsel” oppfylt)

$$\sum_{i=1}^5 X_{ij} = D_j \quad (59)$$

hvor $\underbrace{i = 1, 2, 3, 4, 5}_{\text{stasjon}}$ og $\underbrace{j = 1, 2, 3}_{\text{kommune}}$, altså på formen:

$$X_{\text{stasjon}, \text{kommune}} \quad (60)$$

Skriver ut lign.(59) eksplisitt:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} = D_1, \quad \text{“etterspørsel” i Fræna} \quad (61)$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + X_{52} = D_2, \quad \text{“etterspørsel” i Eide} \quad (62)$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + X_{53} = D_3, \quad \text{“etterspørsel” i Gjemnes} \quad (63)$$

2) Logiske føringer:

Denne føringen er viktig for matematiske algoritmer, slik at de logiske sammenhengene mellom variablene er oppfylt. I dette tilfellet lyder logikken som:

*Hvis vi ikke investerer i en **stasjon**, så har vi ingen uttrykninger fra denne stasjonen*

eller på logisk form:

$$\text{Hvis } \underbrace{Y_i = 0}_{\text{ingen stasj.}} \quad \text{så er} \quad \underbrace{X_{ij} = 0}_{\text{ingen utrykn.}} \quad (64)$$

hvor $\underbrace{i = 1, 2, 3, 4, 5}_{\text{stasjon}}$ og $\underbrace{j = 1, 2, 3}_{\text{kommune}}$, eller på matematisk form (ikke-lineær):

$$X_{ij}(1 - Y_i) = 0 \quad (65)$$

hvor $\underbrace{i = 1, 2, 3, 4, 5}_{\text{stasjon}}$ og $\underbrace{j = 1, 2, 3}_{\text{kommune}}$.

Vi lar være å skrive ut disse føringene eksplisitt.

h) Kostnadsfunksjon: (se lign.(54))

$$C \stackrel{\text{Eq.(54)}}{=} \sum_{i=1}^5 I_i Y_i + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 C_{ij} X_{ij} \quad (66)$$

Dersom vi kun ser på de stasjonene med billigst kjørerute så vet vi fra opplysningene i oppgaveteksten at det kun er:

$$X_{51} \quad , \quad X_{32} \quad , \quad X_{43} \quad (67)$$

Fra lign.(67) ser vi at det kun er stasjon $j = 3, 4, 5$ som er i bruk, dvs.:

$$Y_3 = 1 \quad , \quad Y_4 = 1 \quad , \quad Y_5 = 1 \quad (68)$$

Dermed er det kun disse leddene som gir bidrag til kostnadsfunksjonen C :

$$\underline{\underline{C}} = I_3 + I_4 + I_5 + \overbrace{C_{32}}^{100} X_{32} + \overbrace{C_{43}}^{80} X_{43} + \overbrace{C_{51}}^{80} X_{51} \quad (69)$$

$$= I_3 + I_4 + I_5 + \overbrace{C_{32}}^{100} \underbrace{D_2}_{1500} + \overbrace{C_{43}}^{80} \underbrace{D_3}_{1800} + \overbrace{C_{51}}^{80} \underbrace{D_1}_{3500} \quad (70)$$

$$= \left(600\,000 + 300\,000 + 700\,000 + 100 \cdot 1500 + 80 \cdot 1800 + 80 \cdot 3500 \right) \text{ NOK} \quad (71)$$

$$= \underline{\underline{2\,174\,000 \text{ NOK}}} \quad (72)$$

i) Siden

$$\underbrace{C = 2\,174\,000}_{\text{naiv løsning}} > \underbrace{C = 1\,694\,000}_{\text{LINGO}} \quad (73)$$

så bør vi velge LINGO-løsningen og ikke den naive løsningen.

Begrunnelse:

Årsaken kommer følgelig av at investeringskostnadene er svært høye for denne løsningen siden den krever *tre stasjoner*.

Den optimale løsningen bruker kun *to stasjoner*, noe som gir høyere transportkostnader, men mye lavere investeringskostnader.

Selv om totalkostenden er minst så er vil pasienter bli behandlet av ambulanser fra en annen kommune.

Utrykningstiden kan dermed bli høyere enn det den burde være.

j) Vi har to nye datastørrelser:

- maksimal gjennomsnittstid
- utrykningstiden for hver rute.

Utrykningstider på indeksform: (data)

$$q_{ij} = \text{utrykningstid fra stasjon } i \text{ til kommune } j \quad (74)$$

hvor $\underbrace{i = 1, 2, 3, 4, 5}_{\text{stasjon}}$ og $\underbrace{j = 1, 2, 3}_{\text{kommune}}$, altså på formen:

$$q_{\text{stasjon}, \text{kommune}} \quad (75)$$

Skriver ut lign.(74) eksplisitt:

$$q_{11} = \text{utrykningstid fra stasjon } 1 \text{ til kommune } 1, \text{ dvs. Fræna} \quad (76)$$

$$q_{21} = \text{stasjon } 2 \quad (77)$$

$$q_{31} = \text{stasjon } 3 \quad (78)$$

$$q_{41} = \text{stasjon } 4 \quad (79)$$

$$q_{51} = \text{stasjon } 5 \quad (80)$$

og

$$q_{12} = \text{utrykningskostnader fra stasjon 1 til kommune 2, dvs. Eide} \quad (81)$$

$$q_{22} = \text{stasjon 2} \quad (82)$$

$$q_{32} = \text{stasjon 3} \quad (83)$$

$$q_{42} = \text{stasjon 4} \quad (84)$$

$$q_{52} = \text{stasjon 5} \quad (85)$$

samt

$$q_{13} = \text{utrykningskostnader fra stasjon 1 til kommune 3, dvs. Gjemnes} \quad (86)$$

$$q_{23} = \text{stasjon 2} \quad (87)$$

$$q_{33} = \text{stasjon 3} \quad (88)$$

$$q_{43} = \text{stasjon 4} \quad (89)$$

$$q_{53} = \text{stasjon 5} \quad (90)$$

Maksimal gjennomsnittlig utrykningstid:

$$Q = 25 \quad \text{maksimal gjennomsnittlig utrykningstid}$$

k) Ny policy:

Gjennomsnittlig utrykningstid fås ved å summere tida for alle utrykningene og dele på antall turer:

$$\frac{\text{total uttr.tid Fræna} + \text{total uttr.tid Eide} + \text{total uttr.tid Gjemnes}}{\text{Total antall turer}} \leq 25 \quad (91)$$

Matematisk skrives ligningen ovenfor slik:

$$\frac{1}{D_1 + D_2 + D_3} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 q_{ij} X_{ij} \leq Q \quad (92)$$

hvor $\underbrace{i = 1, 2, 3, 4, 5}_{\text{stasjon}}$ og $\underbrace{j = 1, 2, 3}_{\text{kommune}}$, eller på halvmatematisk form:

Skriver ut lign.(92) eksplisitt: ¹

$$q_1 = q_{11}X_{11} + q_{21}X_{21} + q_{31}X_{31} + q_{41}X_{41} + q_{51}X_{51} , \quad \text{Fræna} \quad (93)$$

$$q_2 = q_{12}X_{12} + q_{22}X_{22} + q_{32}X_{32} + q_{42}X_{42} + q_{52}X_{52} , \quad \text{Eide} \quad (94)$$

$$q_3 = q_{13}X_{13} + q_{23}X_{23} + q_{33}X_{33} + q_{43}X_{43} + q_{53}X_{53} , \quad \text{Gjemnes} \quad (95)$$

som gir

$$\frac{q_1 + q_2 + q_3}{D_1 + D_2 + D_3} \leq 25 \quad (96)$$

¹Det er nok at man kun skriver den nye policy føringen som i lign.(92). For kompletthets skyld tar vi med en alternativ og mer eksplisitt måte å skrive lign.(92) på.

- 1) Fra LINGO-løsningen i figur 3 i oppgavesettet - hvor stasjon 1 er inkludert - leser vi av den gamle løsningen:

$$Y_1 = 1 \quad , \quad Y_2 = 0 \quad , \quad Y_3 = 0 \quad , \quad Y_4 = 1 \quad , \quad Y_5 = 0 \quad (97)$$

og

$$X_{11} = 3500 \quad , \quad X_{12} = 1500 \quad , \quad X_{43} = 1800 \quad \text{alle andre } X_{ij} = 0. \quad (98)$$

og alle andre $X_{ij} = 0$.

Vi sjekker om denne løsningen oppfyller policyføringen:

$$\frac{q_1 + q_2 + q_3}{D_1 + D_2 + D_3} = \frac{q_{11}X_{11} + q_{12}X_{12} + 0 + q_{43}X_{43}}{D_1 + D_2 + D_3} \quad (99)$$

$$= \frac{25 \cdot 3500 + 35 \cdot 1500 + 30 \cdot 1800}{3500 + 1500 + 1800} = \underline{28.53} \quad (100)$$

altså større enn $Q = 25$ minutter.

Nei, den gamle LINGO-løsningen oppfyller ikke den nye policyføringen.

I den nye LINGO-løsningen - hvor utrykningstid er inkludert - så er stasjon 5 med ($Y_5 = 1$) istedet for stasjon 1 ($Y_1 = 0$).

m) Nye data:

Det er kun èn ny datastørrelse, nemlig minimum antall ambulansestasjoner.

Minimum antall ambulansestasjoner:

$$N = 3 \quad (101)$$

hvor N = minimum antall ambulansestasjoner.

n) Ny policy:

Den nye policyføringen krever at minst *tre* av stasjonene er brukt.
Dette innebærer at *summen* av Y_i -variablene er minst lik 3.

Den nye policyføringen på indeksform: (policy)

$$\sum_{i=1}^5 Y_i \geq N \quad (102)$$

hvor $\underbrace{i = 1, 2, 3, 4, 5}_{\text{stasjon}}$, og skriver ut lign.(102) eksplisitt:

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 \geq N \quad (103)$$

hvor $N = 3$.

- o) Vi sammenlikner kostnadene for de to tilfellene.

Kostnader forbundet med stasjon 5:

$$\underline{C_5} = I_5 + C_{51} \cdot D_1 = 700\,000 + 80 \cdot 3500 = \underline{980\,000} \quad (104)$$

Kostnader forbundet med stasjon 1:

$$\underline{C_1} = I_1 + C_{11} \cdot D_1 = 600\,000 + 100 \cdot 3500 = \underline{950\,000} \quad (105)$$

Siden

$$C_5 > C_4 \quad (106)$$

så forkastes stasjon 5 til fordel for stasjon 1.

■

Oppgave 2: (Fasilitetsdesign, 25 %)

- a) Problemet er et lokaliseringsproblem siden vi har 5 potensielle lagerfasiliteter, hvor ikke alle nødvendigvis benyttes.
- b) Problemet er et allokeringsproblem siden vi har 5 potensielle lagerfasiliteter som sammen skal tjene 3 produksjonshaller (markeder).
- c) Vi har følgende indekseringer:
- lagerfasilitetene indekseres ved $i = 1, 2, 3, 4, 5$
 - produksjonshallene indekseres ved $j = 1, 2, 3$

Vi definerer følgende data: ²

$$I_i = \text{investeringskostnad lagerfasilitet } i, \text{ hvor } i = 1, \dots, 5 \quad (107)$$

$$C_i = \text{årlig driftskostnad ved lagerfasilitet } i, \text{ hvor } i = 1, \dots, 5 \quad (108)$$

$$D_j = \text{årlig etterspørsel etter karbonanoder ved produksjonshall } j, \text{ hvor } j = 1, 2, 3 \quad (109)$$

$$C_{ij} = \text{rutekostnad fra lager } i \text{ til produksjonshall } j, \text{ hvor } i = 1, \dots, 5 \text{ og } j = 1, 2, 3 \quad (110)$$

²Husk at data er størrelsen vi ikke kan påvirke.

d) Vi har to variabler:

1) Variabel 1:

Antall ganger en rute benyttes i løpet av et år:

$$X_{ij} = \text{antall ganger lager } i \text{ leverer til produksjonshall } j \text{ i året} \quad (111)$$

hvor $i = 1, \dots, 5$ og $j = 1, 2, 3$

2) Variabel 2:

Hvorvidt en lageret skal benyttes eller ikke:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bruker lagerfasilitet } i \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases} \quad (112)$$

hvor $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

e) Målfunksjonen C er gitt ved totale investerings- og driftskostnader:

$$C = \sum_{i=1}^5 (I_i + C_i) Y_i + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 C_{ij} X_{ij} \quad (113)$$

f) Vi har to føringer:

1) Føring 1:

Etterspørselen ved hver produksjonshall $j = 1, 2, 3$ må oppfylles:

$$\sum_{i=1}^5 X_{ij} = D_j \quad (114)$$

2) Føring 2:

Lagerfasilitet ikke benyttet $\rightarrow$ ingen leveranse fra lageret. På logisk form:

$$\text{Hvis } \underbrace{Y_i = 0}_{\text{intet lager}} \text{ så er } \underbrace{X_{ij} = 0}_{\text{ingen leveranse}} \quad (115)$$

hvor $\underbrace{i = 1, 2, 3, 4, 5}_{\text{lagerfasilitet}}$ og $\underbrace{j = 1, 2, 3}_{\text{produksjonshall}}$, eller på matematisk form (ikke-lineær):

$$X_{ij}(1 - Y_i) = 0 \quad (116)$$

g) Vi utvider modellen til å inkludere lagerkapasitetene:

Nye data:

$$\begin{aligned} \bar{I}_i &= \text{årlig lagerkapasitet for lagerfasilitet } i, \\ &\text{hvor } i = 1, \dots, 5 \end{aligned} \tag{117}$$

$$\begin{aligned} E_k &= \text{årlig etterspørsel etter karbonanoder for aluminiumsverk } k, \\ &\text{hvor } k = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \tag{118}$$

Nye variabler:

Vi må bokføre hvor mye vi leverer fra hvert lager til de eksterne aluminiumsverkene:

$$Z_i = \text{årlig antall anoder levert eksternt fra lager } i \tag{119}$$

hvor $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Legg merke til at det *ikke* er nødvendig å spesifiere til hvilket aluminiumsverk hvert lager leverer til, siden vi kun bryr oss om de *interne* kostnadene.

Vi har to nye føringer:

1) Ny føring 1:

Lagerkapasitet:

Vi kan nå beskrive lagerkapasiteten ved hver lagerfasilitet $i = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\sum_{j=1}^3 X_{ij} + Z_i \leq \bar{I}_i \quad (120)$$

2) Ny føring 2:

Ekstern etterspørsel oppfylt:

Vi må oppfylle den *totale* etterspørselen ved de 4 aluminiumsverkene:

$$\sum_{i=1}^5 Z_i = \sum_{k=1}^4 E_k \quad (121)$$

■